



“DON BOSCO”
D.S. N° 24-89-ED
Chacas, Asunción, Ancash, Perú

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE PROFESOR DE
EDUCACIÓN SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE
MATEMÁTICA**

***ELABORACIÓN Y APLICACIÓN DE LA PROPUESTA
PEDAGÓGICA “VIAJE EN LA HISTORIA DE LOS NÚMEROS”,
BASADA EN EL ENFOQUE DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO,
PARA LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS REALES A LOS
ESTUDIANTES DEL CUARTO GRADO DE EDUCACIÓN
SECUNDARIA DE LA I.E. “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO,
PROVINCIA CARLOS FERMÍN FITZCARRALD, DEPARTAMENTO
DE ANCASH, EN EL AÑO ACADÉMICO 2016.***

Autores:

GUILLERMO RIOS, Wilson Jesús

MONTALVO DELGADO, Ladislao

Asesor:

Mg. CUEVA HINOSTROZA César Gastón

Chacas 2017

DEDICATORIA

A mi querida madre, hermanos, amigos y superiores por haberme acompañado durante mi formación en estos cinco años.

Wilson

A Dios, a mis amigos y a mi madre por haberme acompañado en mi formación durante estos cinco años.
Ladislao

AGRADECIMIENTO

Agradecemos a DIOS por los años vividos en la casa DON BOSCO, de especial manera agradecemos a la familia Casavecchia, don Nicola y su esposa Sra. Serena, por su gratitud, preocupación y comprensión durante estos cinco años.

Así mismo agradecemos al P. Hugo De Censi por habernos indicado este camino y dado la oportunidad de pertenecer a la familia de Don Bosco; de la misma manera agradecemos a nuestros asistentes por habernos acompañado durante nuestra formación.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación, propone el laboratorio matemático “Viaje en la historia de los números” basado en el enfoque del aprendizaje significativo, como una herramienta que favorece el proceso de enseñanza y aprendizaje del conjunto numérico de los reales en los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria. Este plantea un conjunto de actividades que, explorando la evolución del concepto de número a lo largo de la historia de la humanidad, conducen los estudiantes a construir y formalizar el conjunto numérico de los reales a partir de sus subconjuntos.

El objetivo general de esta investigación es el de determinar la influencia de la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números” para mejorar el aprendizaje de los números reales. Para esto la propuesta ha sido aplicada en un grupo experimental, formado los 20 estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la I.E. “Santa Rosa” de Uchusquillo durante el año académico 2016.

El objetivo se ha verificado positivamente contrastando los resultados registrados en las pruebas de pre-test y de post-test. Este proceso ha evidenciado un cambio significativo del nivel de aprendizaje medido en los integrantes del grupo experimental antes y después de la experimentación, puesto que en la preprueba se evidenció que la totalidad de los alumnos se encontraban en un nivel de aprendizaje en inicio, mientras los resultados de la posprueba evidencian que el 95% de los estudiantes superaron sus dificultades, alcanzando el logro esperado, y que hay un 40% de alumnos que destacan por su aprendizaje.

Se concluye la investigación aceptando la hipótesis planteada ya que el balance entre el pre-test y el post-test refleja una mejora sustancial en el nivel de comprensión de los números reales en los estudiantes del cuarto grado.

Palabras claves: historia de los números, enfoque del aprendizaje significativo, números reales.

ABSTRACT

The present research work proposes the mathematical laboratory "Journey in the numbers history" based on the focus of the significant learning, as a tool that favors the teaching and learning process of the set of real numbers in the students of the fourth degree of Secondary Education. These it raises a set of activities that, by exploring the evolution of the concept of number throughout the humanity history, lead the students to construct and formalize the real numerical set from their subsets

The general objective of this research is to determine the application influence of the pedagogical proposal "Journey in the history of the numbers" to improve the learning of the real numbers. For this the proposal has been applied in an experimental group, formed by 20 students of the fourth grade of secondary education of the E.I. "Santa Rosa" of Uchusquillo along the academic year 2016.

The objective has been verified positively by contrasting the results registered in the pre-test and post-test tests. This process evidenced a significant change in the level of learning measured in the members of the experimental group before and after the experimentation, since in the pretest it was evidenced that all the students were in a level of learning in the beginning, while the Post-test results evidence that 95% of the students overcame their difficulties, reaching the expected achievement, and that there are 40% of students that stand out for their learning.

The research is concluded by accepting the hypothesis raised as the balance between the pre-test and the post-test it reflects a substantial improvement in the level of understanding of the real numbers in fourth grade students.

Keywords: *History of the numbers, focus to the meaningful learning, real numbers.*

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN	9
1.1 CARACTERIZACIÓN DEL PROBLEMA	9
1.2 ENUNCIADO DEL PROBLEMA	14
1.3 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	14
1.3.1 <i>Objetivo general</i>	14
1.3.2 <i>Objetivos específicos</i>	14
1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.....	15
1.5 HIPÓTESIS	17
II. REVISIÓN DE LA LITERATURA	19
2.1 ANTECEDENTES	19
2.2 EL APRENDIZAJE.....	19
2.2.1 <i>Aprendizaje significativo</i>	21
2.3 LOS NÚMEROS REALES	25
2.3.1 <i>Relaciones con la realidad cotidiana y laboral</i>	26
2.4 LA MATEMÁTICA EN LA HISTORIA	28
2.4.1 <i>Desarrollo del concepto de número</i>	28
2.4.2 <i>De los números naturales a los reales</i>	34
2.5 EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS REALES.....	37
2.5.1 <i>Presencia en el currículo de la noción de los números reales</i>	40
2.5.2 <i>Dificultades y errores</i>	47
2.5.3 <i>Aprendizaje de los números reales por proyectos</i>	49
III. PROPUESTA PEDAGÓGICA “VIAJE EN LA HISTORIA DE LOS NÚMEROS”	52
3.1 LABORATORIOS MATEMÁTICOS APLICADOS	54
3.1.1 <i>“Contamos como los antiguos”</i>	54
3.1.2 <i>“La fracción egipcia”</i>	55
3.1.3 <i>“Necesito más números”</i>	56
3.1.4 <i>“¿Uno de ellos, uno de nosotros?”</i>	57
3.1.5 <i>“Dimensiones y distancias en el universo”</i>	58
IV. METODOLOGÍA.....	61
4.1 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN	61
4.2 UNIVERSO Y POBLACIÓN	61
4.2.1 <i>Universo de investigación</i>	61
4.2.2 <i>Población de investigación</i>	62
4.2.3 <i>Muestra de la investigación</i>	62
4.3 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS.....	62
4.3.1 <i>Definición y operacionalización de las variables</i>	62
4.3.2 <i>Técnicas e instrumentos y matriz de evaluación</i>	66
4.4 PLAN DE ANÁLISIS.....	73
V. RESULTADOS.....	75
5.1 RESULTADOS	75

5.1.1	Nivel real de comprensión y resolución de problemas de los números reales antes de la aplicación de la propuesta “Viaje en la historia de los números”	76
5.1.2	Referente al objetivo específico: nivel de comprensión y resolución de ejercicios y problemas de los números reales en los estudiantes a través del post-test.....	77
5.1.3	Comparación de los resultados del pre-test y del post-test para determinar si la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números” favorece el desarrollo de los números reales	79
5.1.4	Contrastación del rendimiento académico	81
5.2	INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS	82
5.2.1	Interpretación del nivel real de comprensión de los números reales en los estudiantes del cuarto grado a través de un pre-test.	82
5.2.2	Interpretación del nivel real de comprensión de los números reales en los estudiantes del cuarto grado a través de un post-test.....	84
5.2.3	Interpretación de la hipótesis de la investigación	86
VI.	CONCLUSIONES	87
6.1	RECOMENDACIONES.....	88
ANEXO 01: PRESENTACIÓN DE DIAPOSITIVAS “CONTAMOS COMO LOS ANTIGUOS”		92
ANEXO 02: PRESENTACIÓN DE DIAPOSITIVAS “EL NÚMERO ÁUREO”		99
ANEXO 02: PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA		106
ANEXO 3: SESIONES DE CLASES		118

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Matriz de estrategia, conocimientos y capacidades de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”	60
Tabla 2: Composición del grupo experimenta, alumnos del cuarto grado de la I.E. S. Rosa	62
Tabla 3: Operalización de la variable, aprendizaje de los números reales	65
Tabla 4: Lista de cotejo aplicada a las pruebas de pre-test y de post-test.	70
Tabla 5: Escala de calificación de aprendizaje aplicada a la lista de cotejo con 38 indicadores.	71
Tabla 6: Modificada de “Diseño curricular Nacional de Educación Básica Regular”, Ministerio de Educación 2009	72
Tabla 7: Prueba kr 20 para medir la confiabilidad de la muestra.....	72
Tabla 8: prueba paramétrica: T de student.	74
Tabla 9: Resultados de la prueba del pre-test aplicada el día 01 de setiembre de 2016	76
Tabla 10: Resumen de los resultados obtenidos en la prueba de post-test del 30 de septiembre de 2016	77
Tabla 11: Prueba de normalidad aplicada a los dos conjuntos de datos	79
Tabla 12: Prueba t de muestras correlacionadas	80

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Resultados de la prueba de pre-test aplicada el 01 de setiembre de 2016.	76
Figura 2: Resultados de la prueba de pos-test aplicada el 30 de septiembre de 2016	78
Figura 3: niveles de aprendizajes mediados en el pre y post-test.....	80
Figura 4: grafico de cajas y bigotes	81

I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación, ha sido elaborado con la finalidad de ayudar a los estudiantes de cuarto grado de educación secundaria a comprender el concepto de números reales, tomando como eje de su aprendizaje una propuesta pedagógica para estimular su interés.

La propuesta “Viaje en la historia de los números”, es un proyecto que propone la exploración de la evolución de los números junto a las diferentes civilizaciones; un viaje a través de los milenios para descubrir las implicaciones de los números en el desarrollo de la humanidad, desde los albores de la sociedad humana hasta nuestros días. Es una propuesta didáctica transversal que une los contenidos matemáticos con los temas del área curricular de ciencias sociales, poniendo en una relación espacio-temporal la evolución de la matemática, y específicamente de la idea de número, con el curso de la historia, los descubrimientos científicos, los avances de la técnica y los cambios de nuestra sociedad.

Esta investigación es de tipo cuantitativo, de alcance correlacional y explicativo, porque pone en relación la variable independiente con la variable dependiente siguiendo un diseño pre-experimental, comparando los resultados registrados a través de las pruebas del pre-test y del post-test, en los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria, de la I.E. “Santa Rosa” de Uchusquillo.

1.1 Caracterización del problema

La educación actual tiene como misión que los estudiantes adquieran y desarrollen habilidades y conocimientos que puedan aplicar a lo largo de toda su

vida, con el propósito de que se inserten a la sociedad y al mundo laboral que cada vez se hace más competitivo debido al fenómeno de la globalización.

Esta misión es cada vez más exigente. Los sistemas educativos tradicionales van quedando obsoletos e ineficaces; esto lo podemos evidenciar claramente al analizar los resultados obtenidos en el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA 2012). El Perú, en esta prueba, se ubicó en el último lugar en el área de la matemática, obteniendo 41 puntos que equivalen a un año de atraso en el aprendizaje respecto al promedio de la OCDE (Ganimian, 2015).

La educación de nuestro país por décadas permaneció en un paradigma educativo obsoleto; la práctica del proceso de enseñanza y aprendizaje ha permanecido basada en un método memorístico y sin trascendencia, es decir, de poca importancia y sin utilidad para la aplicación concreta en la vida cotidiana. Esta práctica errónea ha llevado el sistema educativo peruano a resultados preocupantes (Mendoza, 2006).

Analizando los resultados de la prueba PISA 2012, se remarca que aproximadamente la mitad de los estudiantes peruanos no superan ni siquiera el nivel uno de los seis niveles que plantea la prueba PISA. Es decir que logran solamente aplicar procedimientos rutinarios, siguiendo instrucciones directas y explícitas, sin poder interpretar y reconocer situaciones que requieran una mínima inferencia (Guadalupe Mendizábal, 2013).

Según los informes del mismo Ministerio de Educación (MINEDU) los resultados obtenidos por nuestros estudiantes registran un desempeño inferior a lo de sus colegas de países caracterizados por situaciones económicas y sociales similares

al Perú, considerando los ingresos promedio por persona, las inversiones del gobierno en materia de educación y la inversión por estudiante (Ganimian, 2015).

Estos resultados resaltan además que en el sistema educativo nacional perduran al día de hoy fuertes disparidades entre géneros, áreas urbanas y rurales del país y entre instituciones públicas y privadas. Estas condiciones perjudican sobre todos a los estudiantes de las regiones rurales del territorio andino con recursos económicos limitados.

Efectivamente, en las zonas rurales de nuestro país, los estudiantes tuvieron un desempeño bastante menor que los de las áreas urbanas, resultando indicativamente, atrasados de dos años de aprendizaje respecto a sus compañeros que cursan el mismo grado en instituciones educativas de las ciudades.

En el área de matemática, entre los estudiantes de instituciones privadas y los estudiantes de las instituciones públicas, se ha registrado una diferencia indicativa de dos años de aprendizaje. Esto demuestra una menor eficiencia del sistema educativo publico que puede encontrar una motivación en distitos factores: limitada disponibilidad de recursos económicos, falta de materiales educativos, inadecuadez de las infraestructuras y de los recursos humanos, es decir un número reducido de profesores con respecto al número de los estudiantes y docentes desmotivados, entre otras.

Otro problema que perjudica a nivel nacional la calidad de la educación peruana es la alta tasa de ausentismo y el bajo esfuerzo docente. Existe evidencia de que en los países en desarrollo, hay un fuerte ausentismo en el caso de los trabajadores de la educación, por ejemplo, se encuentra que en el caso de Perú la tasa de ausentismo es del 11% para el caso de los docentes (Álvarez, 2012). De este modo

se hace indispensable mejorar la calidad de la plana profesoral, introducir planes de entrenamiento y capacitación continuos que hagan atractiva y dinámica la carrera docente e incentiven a los profesores a mejorar.

Comparando los resultados de la prueba 2012 con las pruebas anteriores, resalta una tendencia positiva en la comprensión lectora y en las habilidades comunicativas. Este dato positivo pero no se registra en el área curricular de matemática en la cual los estudiantes han obtenido un resultado igual a lo de sus compañeros evaluados en el 2009 (Ganimian, 2015).

La situación registrada a nivel nacional se agrava si se observa a nivel regional y local. Si se analiza el nivel de eficiencia de los centros educativos de Ancash estos resultan aprovechar solamente al 42% de sus potencialidades, considerando los recursos y el entorno en el cual operan. Índice que coloca esta realidad por debajo de la media nacional que corresponde al 46%.

Examinando las pruebas censales del 2014, el cuadro que describe la situación educativa del departamento de Ancash resulta preocupante, con menos del 20 % de estudiantes que alcanzan un nivel satisfactorio. Una realidad similar a la de departamentos como Tumbes, Madre de Dios y Huánuco y mejor solamente a los departamentos de Ucayali y Loreto.

En este cuadro resulta que más del 60% de los estudiantes no logran alcanzar los aprendizajes esperados, valor que varía notablemente entre las áreas urbanas y rurales del departamento. Resalta que mientras los estudiantes ancashinos de las instituciones educativas urbanas obtuvieron un promedio de 523, con un 14% de estudiantes que alcanzan un aprendizaje esperado, los estudiantes de las áreas rurales obtuvieron un promedio de 444; en estas áreas el porcentaje de estudiantes que no

alcanza tampoco un aprendizaje en proceso llega a más del 80% y tan solo el 2 % de los estudiantes alcanzan resultados satisfactorios.

Los resultados registrados en la UGEL de la provincia Carlos Fermín Fitzcarrald, encajan en el marco de las instituciones que operan en las áreas rurales de Ancash, con un 81,4% de estudiantes que se califican debajo del nivel 1, aprendizaje en inicio, el 16,8% de estudiantes que se califican en proceso y solamente el 1,8% de los estudiantes censados que alcanza el aprendizaje esperado. Es decir que la UGEL de la provincia Carlos Fermín Fitzcarrald se encuentra en uno de los últimos puestos en cuanto a los resultados que corresponden al nivel satisfactorio (MINEDU, 2014).

El bajo desempeño de los estudiantes en las instituciones rurales puede estar relacionado a los bajos recursos socioeconómicos de las familias, de las comunidades de donde provienen y de las instituciones educativas. Como es de esperar, los colegios ubicados en distritos con mayor nivel de ingreso tienen un desempeño significativamente mejor; mientras que los ubicados en áreas rurales, con ingresos económicos familiares reducidos y servicios básicos como el servicio médico sanitario, el servicio eléctrico y los sistemas de aguas servidas, inadecuados, demuestran resultados pésimos. En el estudio presentado por Álvarez Parras Fernando en el 2012, la brecha entre los colegios operantes en los niveles socioeconómicos más bajos y los que trabajan en las realidades sociales más favorecidas, es notable, con un 9% de colegios del primer quintil que alcanzan un aprendizaje esperado contra el 22% del quinto quintil. Así interpretar los datos del desempeño de los estudiantes de las áreas más desfavorecidas es difícil. ¿Cuánto de este déficit

educativo es atribuible a las condiciones socio-económicas adversas? ¿Cuánto es debido a una ineficiencia del sistema? (Álvarez, 2012).

Lo que queda objetivo es que los estudiantes de las áreas rurales, como los de la provincia Carlos Fermín Fitzcarrald, quedan fuertemente afectados y casi excluidos de las posibilidades de recibir una educación adecuada.

1.2 Enunciado del problema

Ante la problemática descrita, se formula la siguiente pregunta:

¿De qué manera la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece la enseñanza de los números reales a los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria?

1.3 Objetivos de la investigación

1.3.1 Objetivo general

Determinar la influencia de la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, para la enseñanza de los números reales a los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria.

1.3.2 Objetivos específicos

Diseñar la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, para la enseñanza de los números reales en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo.

- Determinar el nivel real de aprendizajes matemáticos y específicamente de los números reales en los estudiantes del cuarto grado de educación

secundaria de la institución educativa Santa Rosa de Uchusquillo, en el año académico 2016 a través de un pre-test.

- Aplicar la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, para la enseñanza de los números reales en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash, Perú en el año académico 2016.
- Determinar el nivel real de aprendizajes matemáticos y específicamente de los números reales en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, en el año académico 2016 a través de un post-test.
- Contrastar los resultados de las pruebas del pre-test y post-test, para determinar si la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece la enseñanza de los números reales a los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash, Perú, en el año académico 2016.

1.4 Justificación de la investigación

Convivimos diariamente con los números desde los primeros años de nuestra vida hasta los últimos días de ella, ya que la matemática es considerada una vía privilegiada para el avance de la ciencia, la tecnología y sobre todo para el desarrollo integral de cada persona.

A consecuencia de esta convivencia, es primordial que cada individuo tenga una sólida base de conocimientos sobre los números, para afrontar y resolver las diferentes situaciones que se suscitan a diario.

Al observar estas necesidades, el presente trabajo de investigación se ha planificado con la finalidad de mejorar un aspecto de la problemática relacionada al aprendizaje de los contenidos matemáticos en las instituciones rurales de nuestro país, especialmente de la Institución Educativa Pública “Santa Rosa” de Uchusquillo.

De forma específica, la propuesta “Viaje en la historia de los números”, tiene el objetivo de alcanzar un desarrollo significativo del concepto y de la construcción del conjunto numérico de los reales, a través de un proceso gradual y sistemático, desde los números naturales pasando por los enteros y racionales, utilizando como instrumento motivador el proceso evolutivo en la historia de los números.

Con esta investigación se ha experimentado una estrategia didáctica con los estudiantes de educación secundaria, especialmente con los estudiantes de cuarto grado de la institución pública “Santa Rosa” de Uchusquillo, para poder dar una respuesta a la problemática del bajo desempeño académico registrado en esta realidad.

La propuesta didáctica presentada en este trabajo apunta a estimular el interés de los estudiantes a través de la historia de los números, en los temas contenidos en el currículo del área pedagógica de matemática y descubrir los enlaces que los relacionan a todos los aspectos de la vida diaria, en las infinitas situaciones significativas en las cuales se involucran. De esta manera propone un laboratorio transversal que une las áreas curriculares de matemática con la de ciencias sociales,

explorando como la matemática se relaciona con el desarrollo de las culturas y sociedades en el curso de los milenios.

Los resultados del presente estudio de investigación constituyen un aporte significativo para que otras instituciones educativas promuevan el uso y la implementación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, luego de verificar los resultados de la aplicación de la misma. De esta manera, la educación secundaria en el área curricular de matemática en las áreas rurales podrá ser más eficaz, y se podrán superar las dificultades que perjudican los resultados académicos de los estudiantes de estas regiones.

1.5 Hipótesis

- **H_1** La aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece la enseñanza de los números reales a los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash, Perú en el año académico 2016.
- **H_0** La aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, no favorece la enseñanza de los números reales a los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash, Perú en el año académico 2016.

II. REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1 Antecedentes

El presente trabajo de investigación tiene algunos antecedentes relacionados con el estudio del conjunto de los números reales; a continuación se mencionan algunos:

En el año 2009, María del Carmen García Jiménez, realizó un trabajo de investigación titulado “Origen de los sistemas de numeración: Aplicaciones didácticas”. Este trabajo hace un recorrido de los distintos sistemas de numeración que ha habido a lo largo de la historia en las distintas civilizaciones.

También encontramos que Remedios Macías Hernández, realizó una investigación denominada “Evolución Histórica del Concepto de Número”, en que analiza la relación entre los conjuntos numéricos a través de la historia de las diferentes civilizaciones.

Además Carlos Luque Arias, Lyda Mora y Johana Torres, han elaborado un trabajo de investigación titulado “Didáctica de sistemas de notación de los números naturales”, en que examinan los sistemas de numeración desarrollados por las antiguas culturas notables.

2.2 El Aprendizaje

Antes de abordar el aprendizaje significativo es necesario aclarar el concepto del aprendizaje. No existe una definición específica y unívoca que reúne y pone de acuerdo a los teóricos, investigadores y profesionales que estudian y trabajan en este campo; sin embargo la mayoría de los autores proporcionan elementos comunes sobre la definición del aprendizaje (Martínez, 2001).

El aprendizaje es un proceso siempre activo, un cambio constante de cada individuo influenciado por el medio en que vive, por ejemplo de acuerdo a la cultura, costumbres, valores morales y sociales de su comunidad. El individuo interrelacionándose con su entorno sociocultural cambia, modifica sus saberes y adquiere nuevos conocimientos, es decir aprende.

En consecuencia aprender es cambiar, adquirir nuevos conocimientos a través del estudio y de la experiencia. Aprender es el resultado de la interacción de todas las relaciones entre el individuo y su entorno que no sólo se limita a la actividad educativa formal (Santos Moreno, 2000).

El aprendizaje se puede clasificar en dos vertientes: recepción y descubrimiento.

El aprendizaje por recepción se produce cuando en las actividades de la clase el profesor desempeña el papel de comunicador de los nuevos saberes y el estudiante recibe la información de modo pasivo (sólo desempeña el rol de simple receptor).

El aprendizaje por descubrimiento es producido por los estudiantes, los cuales participan de manera activa y constructora al proceso de enseñanza y aprendizaje. En este aspecto se distinguen dos tipologías de procesos: por descubrimiento autónomo, que se produce cuando cada persona descubre o crea nuevas informaciones, obras y procesos por sí misma; por ejemplo, un compositor crea una melodía. Por descubrimiento guiado, cuando el estudiante descubre conceptos, reglas, leyes, principios y teorías ya descubiertas; con la guía de otros agentes como el docente o los compañeros (Huerta Rosales, 2007).

El aprendizaje también se puede clasificar en base a otros parámetros como por ejemplo la respuesta a la pregunta ¿qué significa que el estudiante ha aprendido?

Sin embargo no todos los autores coinciden en dar una sola respuesta, sino, dependiendo del enfoque con el cual uno se acerca al estudio del aprendizaje de la matemática, se llega a obtener diferentes respuestas al interrogante: “¿qué significa aprender matemáticas?”

En un enfoque asociacionista el aprendizaje matemático es relacionado a un cambio de conducta en el estudiante observable, bien sea respecto a la forma, al contenido o a la frecuencia de esas conductas. Así el estudiante ha aprendido cuando da respuestas apropiadas tras la presentación de un estímulo específico.

En el conductismo la preocupación primaria, es cómo se ejecuta, se refuerza y se mantiene la asociación entre el estímulo y la respuesta. La meta es que el estudiante logre dar la respuesta deseada cuando se le presenta un determinado estímulo (Peggy, Newby, & Timothy, 1993).

Este enfoque prioriza el repetirse de conductas para que la respuesta correcta tenga más probabilidades de repetirse. Así el aprendizaje se produce cuando el estudiante memoriza sin comprender el significado real de lo que aprende repitiéndolo de forma mecánica. En el aprendizaje repetitivo la estructura cognoscitiva del estudiante no se modifica, el nuevo conocimiento no se vincula con los saberes previos o con los conceptos relacionados, su fenomenología. Esto lleva a un aprendizaje superficial, como aprender una tabla de multiplicar, aprendizaje memorístico y mecánico.

2.2.1 Aprendizaje significativo

Según la teoría ausubeliana el aprendizaje significativo se produce cuando se atribuye sentido a la nueva información, al nuevo conocimiento. Es decir, que se comprende la nueva información y se construye una nueva estructura cognitiva,

ordenada, relacionando la nueva información y la que ya posee el aprendiz y formulando una representación mental de lo aprendido (Ausubel, 1976).

La esencia de un aprendizaje significativo reside en que las ideas expresadas teóricamente sean relacionadas de manera sustancial con lo que el estudiante ya sabe, y no de forma arbitraria. La relación de las nuevas informaciones con algún aspecto esencial de la estructura de conocimientos del aprendiz, por ejemplo una imagen, un símbolo ya con significado, un contexto, situaciones significativas y experiencias vividas reúne en sí las características de un aprendizaje significativo.

El aprendizaje para David Ausubel, está establecido por las estructuras cognitivas del aprendiz, que define como el conjunto de conocimientos y su forma de organización.

“La estructura cognitiva de una persona es el agente decisivo acerca de la significación del material nuevo y de su adquisición y retención” (Pimienta, 2005, p. 13).

El conocimiento será significativo si la estructura cognitiva es estable, segura, consistente y organizada; en consecuencia la información, el conocimiento es asimilado de manera rápida y fácil. Por el contrario, si la estructura cognitiva es inestable, será débil y desordenada; entonces la información se recibirá de manera no organizada, y el aprendizaje no será significativo.

El profesor debe estimular y alentar a los estudiantes a especular y pensar activamente sobre el nuevo material a ser asimilado, aprendido; ayudarlos a encontrar relaciones entre conceptos del mismo contenido y , sobre todo, a instruirles a que relacionen lo nuevo con lo previamente aprendido (Pacheco, 2004).

Para afianzar la estructura cognitiva y dar significado a lo aprendido, toda experiencia debe partir del conocimiento propio del estudiante y a través de continuos conflictos cognitivos, debe permitirle ampliar su universo integrando experiencias anteriores con otras nuevas experiencias significativas que impliquen la generación de un proceso de reconciliación integradora, de subsunción significativa y derivativa, que conduce a un proceso de asimilación y diferenciación progresiva relacionando lo aprendido a situaciones diversas de trabajo, estudio o de su propia vida. Todo esto permitirá generalizar, hacer abstracciones, sacar conclusiones y sobre todo aplicar los nuevos saberes a su realidad. Es decir permitirá al aprendiz dar significado a sus nuevos saberes.

Para aprender significativamente, no se sigue siempre un proceso lineal, sino por el contrario, un proceso cíclico permanente e ilimitado, donde el conocimiento nuevo estructurado a partir de experiencias anteriores, se convierte en saber previo para aprendizajes sucesivos, los conflictos cognitivos se presentan durante todo el proceso generando procesos de reconciliación, subsunción o diferenciación, integralmente o por separado (Huerta Rosales, 2007).

Para Ausubel el aprendizaje significativo es el mecanismo humano, por excelencia, para adquirir y almacenar la inmensa cantidad de ideas e informaciones representadas en cualquier campo de conocimiento (Moreira).

El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante ("subsunsor") pre-existente en la estructura cognitiva; esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones puedan ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o

proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras.

En la educación formal este proceso requiere de cinco condiciones necesarias que los docentes deben considerar:

- No importa solo el contenido que se va a enseñar sino también la forma en que este se presenta. Los materiales y recursos didácticos deben ser “transparentes” para el contenido. Las situaciones significativas, los modelos que se utilizan para contextualizar y representar el conocimiento deben ser apropiados.
- Los contenidos sean comprensibles para el estudiante. La estructura conceptual del estudiante debe contener ideas inclusivas para que relacione el conocimiento presentado con sus saberes previos, si no sucede así, el estudiante guardará en su memoria de corto plazo la información para contestar un examen memorista y olvidar, después y para siempre, ese contenido. Así que los contenidos deben ser introducidos de forma gradual y siempre relacionados con los saberes previos propedéuticos.
- Actitud favorable del estudiante: es necesario motivar, suscitar el interés, contextualizar las situaciones de aprendizaje para favorecer la predisposición del estudiante. Es fundamental que el estudiante quiera aprender. Este es un componente en el aspecto emocional y actitudinal, en el que el educando desempeña un rol importante, por eso resulta necesario renovar las estrategias y los materiales didácticos, trabajar con proyectos transversales que abarquen temas y problemáticas actuales, estimulantes y de interés para los estudiantes.

- Actividad mental del estudiante: para que se produzca el doble proceso de asimilación y acomodación es importante que el aprendizaje se produzca por el esfuerzo del estudiante y no solo por recepción de las informaciones; el aprendiz debe ser quien haga el esfuerzo mental por aprender. El aprendizaje significativo implica la reconstrucción cognitiva ejecutada por el propio estudiante, guiada y estimulada por la intervención del docente, acompañada por actividades significativas.
- Memorización comprensiva: en ciertos argumentos el esfuerzo de repetición es indispensable, sin embargo siempre va acompañado por la comprensión.

Obviamente no siempre estas condiciones indispensables son suficientes para que ocurra un aprendizaje significativo. El aprendizaje será significativo si su contenido puede relacionarse de modo sustantivo, no mecánicamente, con los conocimientos previos, con contenidos a este ligados, con situaciones y problemáticas reales que lo impliquen, de manera que el aprendiz pueda hacer uso de lo que ha aprendido.

Dependerá en gran medida de la experiencia del docente la posibilidad de que los educandos vivencien multiplicidad de estrategias que permitan generar la construcción de aprendizajes nuevos y duraderos.

2.3 Los números reales

El concepto de los números reales surgió a partir de la utilización de fracciones comunes por parte de los egipcios, cerca del año 1.000 a.C. El desarrollo de esta noción continuó con los aportes de los griegos (sobre todo del aporte de la escuela pitagórica), que proclamaron la existencia de los números irracionales (Remedios Macías, 2009).

Sin duda, gracias a las necesidades cotidianas, los sistemas de numeración fueron desarrollándose hasta llegar al conjunto de los reales, que pueden definirse como un conjunto ordenado que se representa mediante una recta, en la que cada punto de la misma simboliza a un número concreto.

Definitivamente en el año 1872, cuatro matemáticos, Weierstrass, Heine, Cantor y Dedekind, dieron con la definición formal de número real. Tanto la definición axiomática como la de las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, son laboriosas y artificiales. El origen de los números reales es más sencillo: “ $\mathbb{Q}$ ” es un cuerpo incompleto, necesitamos de otros números para representar ciertas medidas y magnitudes “no racionales”, que los pitagóricos de la antigua Grecia llamaban “incommensurables” y nosotros hoy día llamamos “números irracionales”. Números que, como su nombre indica, no pueden expresarse como una fracción.

Por lo tanto los números reales son todos los que existen y de ellos se derivan todos como son: naturales, enteros, racionales e irracionales; los que encontramos presentes en el desarrollo de actividades como: sumar, restar, comprar, vender, etc. (Remedios Macías, 2009).

2.3.1 Relaciones con la realidad cotidiana y laboral

Las matemáticas se encuentran presentes de manera significativa en la vida cotidiana de cada ser humano, a veces de una forma casi imperceptible y otras de manera más práctica en el lenguaje interno, oral o escrito. Así nos sumergimos al utilizar de los números reales para comprender y resolver mejor los problemas que se nos presentan.

Por otra parte la matemática cobra mayor significado y se aprende mejor cuando se aplica directamente a situaciones de la vida real. Nuestros estudiantes

sentirán mayor satisfacción cuando puedan relacionar cualquier aprendizaje matemático nuevo con algo que saben y con la realidad cotidiana. Esa es una matemática para la vida, donde el aprendizaje se genera en el contexto de la vida y sus logros van hacia ella.

En general los números reales han favorecido a la mayoría de los avances tecnológicos, de otras ciencias y en nuestras labores de cada día, ya que estos se pueden utilizar de diferentes maneras como: cuantificar, medir, expresar orden, etiquetar, marcar una locación; o simplemente como una tecla para pulsar (Arch Tirado, 2007).

Por esta razón la unidad dedicada a los números reales (rationales e irracionales) deberá contener gran cantidad de problemas de todo tipo. La resolución de los mismos hará que el estudiante obtenga la confianza necesaria en sus capacidades, y los conocimientos necesarios para poder enfrentarse a problemas en su vida cotidiana.

Además el concepto de número real es asimilado de forma significativa, cuando contamos con un proceso cognitivo necesariamente lento, ya que los estudiantes han de integrar diferentes conjuntos numéricos, cada uno con sus especificidades en los dominios de la representación, las operaciones y las estructuras matemáticas y, además, alcanzar una comprensión en profundidad de los procesos infinitos, debido a que los números irracionales son inconmensurables.

Por otra parte, la actividad de resolver problemas es esencial si queremos conseguir un aprendizaje significativo de las matemáticas. No debemos pensar en esta actividad sólo como un contenido más del currículo matemático, sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas, y una fuente de

motivación para los estudiantes ya que permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Al resolver un problema, el estudiante dota de significado a las prácticas matemáticas realizadas, ya que comprende su finalidad (Crespo Crespo, 2009).

Aspectos históricos del concepto de los números reales para comprender la importancia de los números reales y su necesario aporte en el conocimiento matemático es importante explorar su historia, una historia que a lo largo de los milenios ha acompañado muy de cerca la historia y el desarrollo de la humanidad.

2.4 La matemática en la historia

La matemática nació junto al hombre, no porque el hombre la inventara, sino por sus necesidades propias y porque el lenguaje de la naturaleza está dado en conceptos de relaciones y funciones matemáticas; por tanto la matemática ha sido de gran importancia, ya que gracias al uso de esta ciencia se ha logrado la mayoría de los avances tecnológicos.

El hombre a un inicio de la vida empezó a utilizar la matemática sin darse cuenta del razonamiento que hacía, por ejemplo empezó a darse cuenta de la distancia de su cueva al río, el tamaño de la presa que debía atrapar, la altura para coger los frutos. Gracias a las necesidades diarias el hombre empezó a comparar, agrupar y contar. Por eso debemos tener en cuenta que la matemática tiene un gran amarre con la vida diaria (A.F.I.E., 2012).

2.4.1 Desarrollo del concepto de número

El concepto de “número” se desarrolló muy lentamente, a lo largo de la evolución de la mente humana, tras un proceso de abstracción natural, que estaba íntimamente ligado a la vida diaria en todos sus aspectos. En un principio el hombre

tuvo la necesidad de comparar dos conjuntos, aunque no tuviesen la misma naturaleza, con el fin de saber cuántas cosas poseían en su tribu, cuántos animales cazaban, etc. Así el hombre ya tenía el concepto rudimentario de lo que era “contar”. Con el pasar del tiempo tuvo la necesidad de hacer marcas en las cuevas, los árboles, las hojas de los árboles, etc. Para llevar la contabilidad de cantidades más complejas (Remedios Macías, 2009).

A lo largo de la historia, cada cultura ha utilizado diferentes símbolos para representar un número y ha usado distintas reglas para escribirlos y trabajar con ellos. En otras palabras, se han utilizado diferentes sistemas de numeración como el sistema egipcio, el romano, el chino, el decimal, el binario, etc. hasta llegar a nuestro sistema de numeración actual, cada uno con un mismo propósito de contar o agrupar (Jarne, Minguillón, & Zabal).

En la actualidad los números reales son de suma importancia en la vida de cada ser humano, ya que son una base de apoyo, que nos ayuda a comprender y a resolver mejor los problemas que enfrentamos durante nuestras labores de cada día.

El estudio de los números reales a lo largo de la historia de la humanidad es un largo proceso de cambios en los que el hombre siempre buscó respuestas a sus dudas en tema de representaciones matemáticas. La inquietud permitió la aparición de conceptos abstractos en la mente del hombre primitivo.

Así el hombre, empujado por las necesidades de la vida diaria, empezó a identificar, distinguir y representar las cosas que lo rodeaban a través de marcas en huesos, trozos de madera o montoncitos de piedras. Estos fueron los primeros pasos del hombre para empezar a concebir la idea de número. Este concepto ha ido

desarrollándose con el pasar de los siglos para dar respuestas siempre más adecuadas a las exigentes necesidades de la vida (Remedios Macías, 2009).

A lo largo de la historia, cada civilización inventó su propio sistema de numeración, todos con un mismo fin, que es “contar y representar cantidades”. De esta forma cada cultura concibió unos u otros sistemas de numeración y símbolos para expresarlos, que fueron desarrollándose a lo largo de la Historia, perdurando algunos y perdiéndose otros.

El primer procedimiento aritmético de la historia comenzó con el artificio que llamamos correspondencia biunívoca miembro a miembro. Este procedimiento permitía a cualquier persona la posibilidad de comparar dos conjuntos, aunque no tuviesen la misma naturaleza y determinar su tamaño. De esta forma el hombre pudo constatar que entre conjuntos de igual cantidad de elementos, había ciertas igualdades y pudo diferenciar entre un elemento, y muchos elementos; poco a poco el hombre relacionó la igualdad entre conjuntos unitarios, un lobo, una flecha, un cazador etc., concibiendo así la idea de unidad.

El hombre utilizó para “contar” objetos de la propia naturaleza, las manos y los dedos para comparar conjuntos de hasta 10 elementos; cuando los dedos eran insuficientes, recurrían a otros métodos, como usar piedritas, conchas, palitos de madera o cualquier otro elemento que encontraba a su alcance. Este método concreto de contar permitía cuantificar y comparar diversos conjuntos, el número de ovejas en el rebaño, la cantidad de presas cazadas, las medidas de trigo recogidos etc. Por ejemplo los pastores primitivos utilizaban montoncitos de piedra para poder verificar el número de animales que poseían y que volvían a la cueva cada tarde. Aunque todavía no sabían expresar el número de ovejas ni cuántas faltaban. Tuvo que ser así,

comparando cantidades, como el hombre comenzó a construir el concepto de número.

Posteriormente, los hombres prehistóricos, fueron inventando otras técnicas para contar, comparar cantidades y conservar la información, representando las cantidades gráficamente. Para esto el hombre realizaba marcas en huesos o maderas, representaciones pictóricas en las cuevas, etc. Este paso que aparentemente no lleva en si ningún avance, es revolucionario por dar un salto de abstracción de la primera idea de número, pasando de un nivel concreto a un nivel gráfico. Con este cambio, el hombre dio los primeros pasos hacia los sistemas de numeración.

Poco a poco, el hombre aprendió a contar de dos en dos, de tres en tres, de cinco en cinco, utilizando diferentes montones o diferentes marcas para indicar unidades de orden superior. Esta fue la posa de la primera piedra para la construcción de los sistemas numéricos.

La civilización de los sumerios, aproximadamente 5000 años atrás, inventó por primera vez la escritura de los números, para representar de forma simbólica las cantidades. Esta evolución era impulsada por las necesidades asociadas a los diversos tipos de intercambio comercial.

Los números fueron escritos en tablas de arcilla, que representan las primeras actas contables de la historia. Posteriormente, los sumerios, fueron perfeccionando aquella escritura, utilizando el número 60 como base de su sistema numérico (sistema sexagesimal). Fue tan revolucionaria esta innovación que constituyó la base de los demás sistemas y sus rastros perduran hasta el día de hoy en algunos sistemas como en la forma de medir un ángulo o en la medida del tiempo.

Es en esta región, la Mesopotamia, que nace y se desarrolla el concepto numérico, y es entre los babilonios que se introdujo en la escritura de los números el primer cero, para significar la ausencia de unidades sexagesimales de cierto rango. Cada vez que faltaba una potencia de 60, la representaban mediante este nuevo símbolo, en lugar del espacio vacío. La invención del cero fue uno de los otros saltos en adelante, de gran importancia para el desarrollo de la matemática y específicamente para el desarrollo del concepto de número.

Fueron los egipcios los primeros en utilizar las fracciones (Remedios Macías, 2009). De esto se encuentra una prueba en el “Papiro de Rhind”, una de las más antiguas e importantes fuentes históricas que tratan temas matemáticos y que es datado en 1650 años antes de Cristo. Los arquitectos del Faraón utilizaban las fracciones para determinar la inclinación de las pirámides.

Uno de los sistemas de numeración antiguos, que resalta por su difusión y por su importancia, y que hasta hoy es utilizado para indicar los números ordinales, es el sistema Romano. Con este sistema se podía escribir todos los números del 1 hasta el millón utilizando solamente 7 símbolos. Los números se leen de la izquierda hacia la derecha, el símbolo que tiene valor mayor se coloca a la izquierda y se le suma el valor de los símbolos escritos a su derecha; si un símbolo de valor inferior se escribe a la izquierda de uno de valor superior el primero se resta al segundo (García Jiménez, 2009).

De esta manera los romanos lograron utilizar un sistema que permitía escribir cualquier número repitiendo a lo máximo tres veces un mismo símbolo.

Otros sistemas fueron empleados en las diferentes culturas como en la civilización China que utilizaba un sistema decimal híbrido, aditivo y multiplicativo; sin duda el importante de esta civilización fue el uso de los números negativos.

El hombre a partir de ese momento, empezó a representar los números enteros, fraccionarios e irracionales, formando una cadena de números siempre más abstractos, que servían para dar respuestas más precisas a los problemas (Remedios Macías, 2009).

Nuestro actual sistema numérico deriva en lo que ha utilizado la civilización Hindú.

Fue pero solamente en el V siglo d.C. que los hindúes perfeccionaron un sistema numérico posicional. Este paso ha sido una revolución: con solo 10 símbolos fue posible escribir todos los números (Remedios Macías, 2009).

Por otro lado y de forma totalmente independientes también las culturas precolombinas desarrollaron la idea de número y sus sistemas de numeración. La civilización Maya practicaba el comercio, la agricultura y la astronomía y, gracias a estas actividades que realizaban, tenían un amplio conocimiento sobre los números. Sin duda, conocían el cero y su sistema de numeración era de base veinte o vigesimal y posicional, y utilizaban el cinco como base auxiliar.

En México, entre los siglos XIV y XVI de nuestra era se desarrolló la civilización Azteca. Los aztecas crearon un sistema de cifras que conocemos a partir de manuscritos que los especialistas llaman Codex. Esta numeración se basaba en el principio aditivo según el cual el valor de una representación se obtiene sumando los valores de las cifras. Era una numeración de base vigesimal o base 20.

A comienzos del siglo XII, La civilización incaica llevaba archivos y una contabilidad muy precisa, gracias a un dispositivo llamado “quipu”, un sistema de

cuerdas multicolores con nudos. Su sistema era de base decimal. El quipu se utilizaba para registrar datos importantes, como la cantidad de producción en las cosechas, el número de habitantes, etc., y sólo podía ser leído por personas especializadas, denominados kipucamayocs (Zeballos).

Es así que el concepto de número, ha venido evolucionando a través de diferentes civilizaciones en la que cada una de estas ha tenido un largo proceso de cambios hasta llegar a nuestro sistema actual.

2.4.2 De los números naturales a los reales

Es importante recalcar que los números han ido desarrollándose y perfeccionándose desde los números naturales hasta llegar al conjunto de los reales, a consecuencia de la convivencia y relación diaria de cada individuo con los números, siempre para dar respuestas más precisas a los problemas de cálculo. Además el estudio del conjunto de los números es la base para todas las ciencias, por eso la asimilación de los conceptos se desarrolla empezando desde los números naturales hasta los reales, ya que los números son inconmensurables.

Los números naturales surgen como respuesta a la necesidad de nuestros antepasados de contar los elementos de un conjunto (por ejemplo los animales de un rebaño) y de asignar un símbolo a una determinada cantidad de objetos.

Al desarrollarse la sociedad y con ella las ciencias y la técnica del negocio, pronto resultó que los números naturales no eran suficientes para dar soluciones exactas a los nuevos problemas como las deudas, los grados de las temperaturas, etc. A consecuencia de este problema surge un nuevo conjunto numérico, los números negativos, que introducen una polaridad al número como cantidad. La introducción de estos números no ha sido nada fácil ya que es algo abstracto y no la

representación de una cantidad física. Estos números aparecieron como resultados de operaciones matemáticas que por el conocimiento del tiempo no tenían sentido; la diferencia entre dos números naturales a y b donde $a < b$ no tenía sentido por un griego, por eso su resultado hacía parte de un conjunto de números llamados falsos, absurdos o ficticios. Los chinos, probablemente en esta misma época, utilizaron los números negativos sin muchos problemas aún si no los formalizaban. Utilizaban en el ábaco dos tipos de varillas, unas de color negro para los números positivos y otras de color rojo para los negativos (Remedios Macías, 2009).

Fueron los hindúes que por primeros utilizaron formalmente los números negativos en los intercambios comerciales, formalización que llevaron en occidente, junto a sus negocios, solo en la alta Edad Media (Primo Martínez , y otros, 1995).

A pesar que la ampliación del conjunto de los naturales al de los enteros trajo la posibilidad de resolver ecuaciones y diferencias anteriormente imposibles, estos números resultaban insuficientes a la solución de todos los problemas matemáticos. Esto impulsó el uso de otros números como relación o cociente.

Los números racionales y el uso de las fracciones surgieron muy pronto en la historia de las matemáticas, debido a la necesidad de resolver problemas como medir longitudes, áreas, tiempo, pesos y todo otro tipo de medidas. Al enfrentarse a esto en la vida cotidiana, los hombres pronto descubrieron que no era suficiente poder contar con los números enteros para hacerlo de manera exacta, ya que estas medidas eran susceptibles de divisiones más pequeñas que la unidad, o divisiones mayores que la misma pero que no eran números naturales, por lo que fue necesario ampliar el concepto de número entero. Así surgieron los números racionales.

Estos números aparecen ya en los primeros textos matemáticos de los que hay constancia; quizás uno de los más antiguos y más importantes sea el Papiro Rhind de Egipto, que ya mencionemos, escrito hacia el 1.650 a.C. y que pasa por ser la mayor fuente de conocimiento de la matemática egipcia (Flores Gil, 2008).

Por estos motivos, la ampliación del conjunto de los números enteros al de los racionales, hace que la división de cualquier número entre otro no nulo se pueda realizar en el nuevo conjunto.

El concepto o idea de número irracional apareció pronto en la geometría. Ya los antiguos griegos observaron que los números racionales no completaban la recta. Quizás el primero en constatarlo fue el célebre filósofo y matemático griego Pitágoras de Samos (582 a.C. – 507 a.C.), quien estudiando un triángulo rectángulo con catetos de longitud uno, observó que la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo no podía tener un valor racional. Con esto demostró la no completitud de los números racionales y dedujo la existencia de algunos números inconmensurables, que hasta entonces eran desconocidos.

Por mucho tiempo fue difícil de aceptar estos números ya que eran muy difíciles para concebirse por la mente humana. Recién a inicios del siglo XVI son aceptados formalmente, al considerar estos números como inconmensurables, es decir números decimales aperiódicos, que en la actualidad conocemos como números irracionales (Flores Gil, 2008).

Por lo tanto, los números irracionales surgen por la imposibilidad de resolver en $\mathbb{Q}$ ciertos problemas. Por ejemplo, si se quiere calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, esto no es posible hacerlo en el conjunto de los números racionales, ya que por el teorema de Pitágoras, llamando d a la longitud buscada, se

ha de cumplir que $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, de donde, $d = \sqrt{2}$ que no es un número racional puesto que no se puede expresar como una fracción, en otras palabras la expresión decimal de $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras decimales (Jarne, Minguillón, & Zabal).

2.5 El aprendizaje de los números reales

La idea número se desarrolla desde la edad pre-escolar de manera inconsciente. Por ejemplo, el hombre en la infancia recoge piedritas, reúne sus juguetes, etc. dando así el uso de los números involuntariamente. También a fuera de una educación formal, el hombre aprende desde siempre a utilizar los números, impulsado por sus numerosas necesidades.

Al entrar al proceso escolar se desarrolla el aprendizaje de los números de manera formal, lo que supone que se llegue, en el trayecto de la educación básica, a conocer los diferentes conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales y reales), sus propiedades y su operacionalización; este proceso de aprendizaje se desarrolla de manera gradual en todos los niveles de la educación básica regular pasando de la idea innata de número como cantidad de objetos físicos de una colección, a niveles progresivamente más abstractos, representaciones gráficas, representaciones simbólicas, números negativos, fraccionarios hasta formalizar el conjunto de los reales.

Los estudiantes, al enfrentar problemas de aritmética, aprenden a efectuar las operaciones con los números enteros positivos, con las fracciones positivas y con el cero, desde la escuela primaria. Después a medida que avanzan, con el álgebra, la geometría, empiezan a ampliar el uso de los números a los enteros y racionales negativos para llegar a descubrir que estos números no son suficientes para resolver

todos los casos que se le presentan. Esto introduce la necesidad de utilizar nuevos números.

Según las rutas de aprendizaje, el concepto de número real involucra dos procesos claves para su desarrollo, el significado y el uso.

En el estudio de los números reales es preciso afianzar la notación decimal de los números reales, su orden y densidad por medio de la expresión decimal y fraccionaria, realizar aproximaciones con números decimales, establecer la correspondencia entre el número real y la recta numérica, así como realizar medidas de longitudes (Saavedra Salas, Collanqui Díaz, Arroyo Guzmán, & Saavedra Salas, 2013).

Además, el estudio de los números reales aumenta de complejidad de acuerdo al nivel educativo. El concepto de número se amplía a partir de los números naturales, para luego explorar y formalizar los números negativos, los fraccionarios o racionales en diferentes niveles de concreción. También los números irracionales se introducen en el uso de los estudiantes de forma gradual; desde la educación primaria, los estudiantes aprenden el significado y el uso de algunos números irracionales aún si en forma aproximada y sin tener una noción formal de estos. Es el caso del número π , que los estudiantes descubren, como número especial, al enfrentar el cálculo de la longitud de la circunferencia y al cuál dan un valor aproximado, $\pi = 3,14$.

A pesar de esto, los estudiantes encuentran obstáculos en la asimilación de la idea formal de números irracionales por su fuerte nivel de abstracción. Efectivamente, aún si aprendemos a utilizarlos, de forma aproximada y no completamente consciente, desde temprana edad su formalización y comprensión

requiere la capacidad de reconducir a situaciones significativas y fenomenologías reales un concepto puramente abstracto como lo de la continuidad de los números reales.

Los números irracionales son aquellos que carecen de una fracción generatriz y cuya expresión decimal es infinita y no periódica.

Una de las representaciones graficas que ayudan la comprensión de los números reales en su complejidad es la recta numérica. La recta en su definición de conjunto infinito y continuo de puntos, sin interrupción ni espacios vacíos, simula y representa perfectamente el conjunto de los reales. Los puntos, adimensionales, que conforman la recta, a pesar de su abstracción, representan precisamente los elementos del conjunto de los reales, los números.

La recta numérica de los números reales está formada por un conjunto infinito de puntos, que tienen las siguientes características: cada punto de la recta corresponde exactamente a uno y un solo número real y cada número real corresponde exactamente a uno y un solo punto de la recta. Aún sin darse cuenta el estudiante, da los primeros pasos al asociar los puntos de una recta con ciertos números reales, obteniendo un concepto formal y concreto de la continuidad de los números reales (Jurgensen, Donnelly, & Dolciani, 1968).

Por las motivaciones expuestas, considerando la idea de número como una estructura conceptual compleja, una cadena de ideas, conceptos formales, propiedades, relacionados entre sí y relacionados con una infinidad de situaciones significativas, fenómenos, modelos; es necesario enfrentar la tarea de enseñanza de estos contenidos a partir de lo que aparece obvio, los números naturales. No se puede esperar alcanzar una asimilación y comprensión de los conjuntos numéricos y en

particular del conjunto de los reales, si no construimos esta estructura conceptual. Las nociones abstractas y a la vez complejas que definen y caracterizan los reales no son significativas si no entran a hacer parte de una estructura del conocimiento más completa.

Por esto al enfrentar el desafío del proceso de enseñanza y aprendizaje de los números reales se ve necesario construir estrategias didácticas diseñadas para concadenar de una forma gradual y sistemática sus subconjuntos numéricos. Esto se obtiene reforzando y formalizando las ideas que los estudiantes ya tienen y relacionando estas con las nuevas que se proponen con los nuevos contenidos.

En consecuencia el conocimiento de los números reales es especialmente importante, porque todo lo que nos rodea está en relación con los números, por ejemplo en la arquitectura, ya que es fundamental a la hora de realizar cálculos de estructuras, dimensiones, pesos, etc. También es útil en dibujo, pintura, o escultura, para obtener proporciones adecuadas que aumenten la belleza de la obra (Flores Gil, 2008).

2.5.1 Presencia en el currículo de la noción de los números reales

Una de las finalidades de la educación, quizás la más evidente, es lograr que los estudiantes desarrollen la capacidad de saber actuar en un contexto particular, en función de un objetivo, y desarrollen la capacidad de dar solución a un problema que se les presenta. Es decir que entre los fines de la educación resalta el reto que los adolescentes puedan realizar sus potencialidades como persona y aportar al desarrollo social. Es en este marco que el Ministerio de Educación, como una de sus políticas priorizadas, busca asegurar que todos y todas logren aprendizajes de calidad

con énfasis en comunicación, matemática, ciudadanía, ciencia, tecnología y productividad.

Para tal fin, el Proyecto Educativo Nacional establece la necesidad de transformar las instituciones de Educación Básica de manera tal que asegure una educación pertinente y de calidad; los especialistas del Ministerio de Educación producen cada año nuevos documentos y nuevas herramientas para los docentes que seleccionan o se ponen en acción las diversas capacidades y recursos del entorno vivencial de los estudiantes.

En el ámbito de la matemática, nos enfrentamos al reto de desarrollar las competencias y capacidades en su relación con la vida cotidiana. Es decir, como un medio para comprender, analizar, describir, interpretar, explicar, tomar decisiones y dar respuesta a situaciones concretas, haciendo uso de conceptos, procedimientos y herramientas matemáticas.

En las “Rutas del aprendizaje” se formulan cuatro competencias matemáticas a partir de distintas situaciones que provienen del entorno inmediato o de experiencias cercanas y cotidianas a la vida de los estudiantes.

- **Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad.** Esta primera competencia implica que los estudiantes practiquen matemática mediante acciones orientadas a resolver problemas sobre números enteros, múltiplos y divisores, proporcionalidad directa e indirecta, fracciones y decimales en diferentes contextos, máximo común múltiplo y mínimo común divisor. Implica también que los estudiantes expresen formas de razonamiento basados en argumentar sobre experiencias con las variaciones porcentuales, los incrementos bajo condiciones de razón proporcional, regularidades

relacionadas a exponentes positivos, así como las propiedades de las cuatro operaciones con fracciones y decimales.

- **Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de regularidad, equivalencia y cambio.** Esta implica explorar el entorno y reconocer en él problemas referidos a situaciones de regularidad, equivalencia y cambio en los diferentes campos del arte, la economía, la física la biología. Estos campos permiten abordar la matemática mediante las transformaciones geométricas, las progresiones aritméticas y geométricas, las ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita, y funciones lineales. Implica también que los estudiantes expresen formas de razonamiento basados en argumentar experiencias para generalizar expresiones basadas en la progresión aritmética y geométrica, la igualdad y desigualdad, así como en las funciones.
- **Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de forma y movimiento.** Esta competencia implica que los estudiantes practiquen matemática mediante acciones orientadas a resolver problemas referidos a prismas, cilindros, polígonos, triángulos y cuadriláteros, así como la ubicación y medida de cuerpos en el plano. Estas acciones contribuyen al proceso de aprendizaje de la matemática, cuando el estudiante puede expresarlas en modelos matemáticos de tal forma que caracteriza los atributos de forma, localización y medida de formas bi y tridimensionales.
- **Actúa y piensa matemáticamente en situaciones que requieren gestionar datos.** Esta implica que los estudiantes tengan la oportunidad de cuestionar su entorno, plantearse preguntas sobre su escuela, localidad y comunidad, de tal

forma que puedan recoger, organizar y presentar datos relevantes que faciliten reconocer diferentes clases de estudio estadístico, así como, reconocer los tipos de inferencias incluyendo el papel que desempeña la población y muestra, lo muestral y lo aleatorio en encuestas y experimentos, comprendiendo el significado de los datos cuantitativos y cualitativos, interpretando gráficos estadísticos basados en tablas de frecuencia para datos agrupados y no agrupados.

Por cada una de las competencias así planteadas, las “Rutas del aprendizaje” consideran seis capacidades matemáticas que permiten hacer más visible el desarrollo de la competencia matemática y trabajarla de forma integral.

- Matematiza situaciones
- Comunica
- Representa
- Elabora diversas estrategias para resolver problemas
- Utiliza expresiones simbólicas técnicas y formales
- Razona y argumenta generando ideas matemáticas

Para poder trabajar más fácilmente estas seis capacidades se han agrupado en cuatro bloques.



Fig. 1: Modificada de “**Rutas del aprendizaje**”, Fascículo 1, Ministerio de Educación 2013

Analizando en específico la presencia de los números reales en el currículo, este contenido se encuentra como componente importante de la primera competencia matemática “Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de cantidad”.

De tal manera las “Rutas del aprendizaje ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? ”, en el fascículo correspondiente al tercero, cuarto y quinto grado de Educación Secundaria publicado en el año 2015, prevé un estándar de aprendizaje que los estudiantes deben lograr al concluir el séptimo ciclo de la EBR.

El estándar establecido parte con objetivos específicos que señalan que, cada estudiante logre relacionar datos provenientes de diferentes fuentes de información, referidas a diversas situaciones de regularidades, equivalencias y relaciones de variación; y las expresa en modelos de sucesiones con números racionales e irracionales, ecuaciones cuadráticas, sistemas de ecuaciones lineales, inecuaciones lineales con una incógnita, funciones cuadráticas o trigonométricas.

Además el estudiante analiza los alcances y limitaciones del modelo usado, evalúa si los datos y condiciones que estableció ayudaron a resolver la situación.

Expresa usando terminología, reglas y convenciones matemáticas las relaciones entre propiedades y conceptos referidos a: sucesiones, ecuaciones, funciones cuadráticas o trigonométricas, inecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales.

También el alumno elabora y relaciona representaciones de una misma idea matemática usando símbolos, tablas y gráficos. Diseña un plan de múltiples etapas orientadas a la investigación o resolución de problemas, empleando estrategias heurísticas y procedimientos para generalizar la regla de formación de progresiones aritméticas y geométricas, hallar la suma de sus términos, simplificar expresiones usando identidades algebraicas y establecer equivalencias entre magnitudes derivadas; con apoyo de diversos recursos. Juzga la efectividad de la ejecución o modificación del plan.

Al mismo tiempo el estudiante de este ciclo será capaz de formular conjeturas sobre generalizaciones y relaciones matemáticas; justifica sus conjeturas o las refuta basándose en argumentaciones que expliciten puntos de vista opuestos e incluyan conceptos, relaciones y propiedades de los sistemas de ecuaciones y funciones trabajadas.

Respecto a los números reales estos estándares planteados en las “Rutas del aprendizaje” se precisan con las siguientes habilidades:

- Expresar modelos matemáticos con números racionales e irracionales.
- Leer, escribir y comparar números racionales en notación científica utilizando potencias de 10 con exponentes enteros (positivos y negativos).
- Expresar la escritura de una cantidad o magnitud grande o pequeña haciendo uso de la notación científica.

- Expresar de forma gráfica y simbólica los números racionales considerando también los intervalos e irracionales.
- Realizar cálculos de suma, resta, multiplicación y división, con los números racionales al resolver problemas.
- Realizar operaciones con números racionales e irracionales al resolver problemas.
- Plantear conjeturas basado en la experimentación, para reconocer números irracionales en la recta numérica.
- Emplear ejemplos y contraejemplos para reconocer las propiedades de las operaciones y relaciones de orden en $\mathbb{Q}$.
- Generalizar que todo número irracional son decimales infinitos no periódico.
- Justificar la condición de densidad y completitud de la recta real.
- Justificar procedimientos de aproximación a los irracionales, empleando números racionales.
- Plantear conjeturas respecto a relacionar cualquier número con una expresión decimal.

Para alcanzar los estándares de aprendizaje establecidos por los documentos curriculares es conveniente que los estudiantes se enfrenten a situaciones problemáticas próximas a la realidad o que puedan captar su interés. Esto involucra crear un ambiente que aliente a los estudiantes a experimentar, ensayar, producir diferentes estrategias de resolución y aportar ideas para enfrentar los problemas propuestos.

Siguiendo esta perspectiva, la presente investigación propone una unidad didáctica que desarrolla y fomenta escenarios de aprendizaje respecto a los números

reales por medio de laboratorios matemáticos, en los cuales el estudiante, a partir de reseñas históricas sobre la evolución de la idea de número y la presentación de problemáticas reales explora el conjunto numérico de los reales, su importancia en la evolución de la ciencia y de la humanidad y por fin logra formalizar su concepto y propiedades matemáticas (Collanqui Díaz, Zelarayan Adatao, Díaz Maguiña, Monteza Ahumada, & al., 2015).

2.5.2 Dificultades y errores

Las dificultades y los errores en la comprensión de los números reales residen principalmente en la comprensión de características, procedimientos y conceptos que subyacen a la misma estructura lógica que los define axiomáticamente. Además estas dificultades se presentan debido a varios factores, como por ejemplo los de origen didáctica que se basan al sistema de enseñanza en el que se encuentra inmerso el estudiante en currículos o textos no adecuados. Las dificultades que presentan los estudiantes en el desarrollo de los números reales se observan sobre todo en los siguientes contenidos: identificación y representación de los números reales, operación con los números racionales e irracionales, aproximación.

Ya no son dificultades ligadas al “sentido” o la “significación” de los números con signo, sino a las reglas formales de escritura y cálculo. Y también aquí se observa una relación directa entre las prácticas habituales de enseñanza y los errores de los estudiantes. Una de ellas es la interpretación que hacen muchos libros de texto de los signos $+$ y $-$ como signos operativos binarios, lo que fuerza a seguir interpretando las expresiones algebraicas numéricas en términos de sumas y restas entre números sin signo, con lo que todas las ventajas que supone el cálculo con números con signo se pierden.

Otra dificultad es que un entero se confunde con su inverso: $1/7$ se confunde con $7/1$, o bien, $1/7$ y $7/1$ se consideran como dos escrituras equivalentes.

Otro error frecuente es la equivocada comparación entre fracciones: una fracción como $\frac{1}{2}$ se considera menor que la fracción $\frac{1}{3}$, argumentando que $2 < 3$ o la mitad de la fracción $\frac{1}{6}$ se designa frecuentemente por la fracción $\frac{1}{3}$ (que es en realidad el doble de $\frac{1}{6}$), argumentando que la mitad de 6 es 3.

Para multiplicar entre sí dos fracciones, se les reduce a un común denominador, después se multiplican los numeradores olvidando de multiplicar entre sí los denominadores. En este caso se trata de una confusión entre las reglas de la adición de fracciones y las de la multiplicación (Cid, Godino, & Batanero, 2003).

Además las relaciones entre conjuntos numéricos entrañan cierta dificultad para los alumnos y hay que asegurarse de que sean comprendidas. Es necesario hacer hincapié en la relación de identidad existente entre los números racionales y los decimales periódicos. El salto conceptual de los números racionales a los irracionales puede resultar complicado por la aparición de infinitas cifras que no se repiten. Por eso conviene dedicar un especial esfuerzo para que los alumnos alcancen el mayor grado de comprensión posible a la hora de identificar y trabajar con los distintos tipos de números que aparecen en la unidad.

El hecho de que un número irracional posea infinitas cifras decimales, es pensado por los alumnos como una dificultad para la realización de cálculos, y en ese momento aparece, tal vez de manera inesperada el cuestionamiento sobre la utilidad práctica de los números irracionales (Flores Gil, 2008).

2.5.3 Aprendizaje de los números reales por proyectos

La matemática es inseparable de sus aplicaciones. Lo que justifica y empuja su desarrollo, desde los albores de la humanidad, es, y ha sido, su utilidad en la resolución de muchos problemas estrictamente ligados a la vida del hombre, a sus necesidades de comerciar, construir, conocer el medio que lo rodea, construir herramientas y artefactos para realizar sus actividades laborales etc.

La matemática y su historia se prestan a trabajar de manera interdisciplinar, a través de un proyecto que, abarcando diversas áreas curriculares, motive e impulse el proceso de aprendizaje.

La posibilidad de trabajar, en la enseñanza de la matemática, a través de proyectos trae varios puntos positivos. Trabajar con proyectos ayuda a contextualizar los contenidos matemáticos, relacionándolos con su utilidad en la cotidianidad, con el desarrollo de la ciencia y la técnica, con los aportes que traen a la sociedad. Así los contenidos matemáticos toman significado. Los proyectos refuerzan el interés de los estudiantes por el aprendizaje y en los trabajos grupales el estudiante es actor en el proceso de aprendizaje, participando activamente al mismo.

En el aprendizaje de la matemática, por otro lado, hay que diferenciar entre conocer y ser capaz de aplicar un conocimiento. La habilidad para aplicar los conocimientos matemáticos es frecuentemente mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no sólo conocimientos técnicos, sino también conocimientos estratégicos. Los problemas y ejercicios de los libros de texto sólo suelen concentrarse en los conocimientos técnicos. Al trabajar con proyectos se coloca a los estudiantes en la posición de tener que utilizar sus conocimientos y practicarlos en los contextos realísticos que se les propone.

Por estos motivos se propone una unidad didáctica, titulada “Viaje en la historia de los números” para poder enseñar, a los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria, las propiedades, el uso de los números reales.

La propuesta “Viaje en la historia de los números”, es un proyecto basado en el proceso evolutivo del hombre; ya que los números nacen junto a él. Por esta razón la propuesta mencionada es una historia evolutiva de las diferentes civilizaciones que surgieron en los distintos puntos del mundo, en la que se resaltan los grandes cambios en la estructura simbólica y escrita de los números hasta llegar a una abstracción de éstas, desarrolladas por cada cultura.

Utilizar el desarrollo de los números desde su aparición hasta hoy, realizando un “Viaje en la historia”, permite que los estudiantes puedan comprobar cómo diferentes civilizaciones y culturas hayan ido contribuyendo con sus conocimientos y estudios, tanto en éste como en todo tipo de temas, al avance y desarrollo de la sabiduría de la humanidad. Esto permite trabajar de forma transversal los contenidos matemáticos junto a contenidos de historia universal, relacionando las áreas curriculares de matemática y ciencias sociales. Además por medio de este trabajo se puede fomentar el respeto y valoración de la aportación de las distintas culturas en la construcción del saber humano y de nuestra actual sociedad.

Cada civilización, a lo largo de la historia, inventó su propio sistema de numeración con el mismo fin de contar y representar cantidades a partir de las necesidades y exigencias de su peculiar sociedad. A consecuencia de esto, cada cultura dio pasos muy importantes en el transcurso de los siglos, para dar respuestas más precisas a los diferentes problemas de cálculo; en el cual algunos de los sistemas de numeración, fueron perpetuándose y otros perdiéndose.

En este contexto los sistemas más importantes inventados por las diversas culturas fueron: sexagesimal (babilonios), decimal (hindúes, incas, chinos, egipcios), quinario (romanos), vigesimal (mayas y aztecas). Cada una de estas civilizaciones notables, aportaron de una u otra manera en el desenvolvimiento de la sociedad gracias al utilizzo de los números, como base de todos sus avances.

Al igual que la evolución del hombre, los números también han venido perfeccionándose porque los números están relacionados directamente con la vida cotidiana de cada ser humano. Por esta razón, el hombre optó por un sistema de numeración más adecuado y sencillo, ya que algunos símbolos numéricos eran inadecuados para dar respuestas más precisas a los problemas de la cotidianidad. Así se llegó a una universalización del sistema de numeración (indo-arábico), gracias a los contactos culturales en las actividades comerciales y conquistas de tierras por culturas grandes como fue la antigua Roma, etc.

III. PROPUESTA PEDAGÓGICA “VIAJE EN LA HISTORIA DE LOS NÚMEROS”

El presente estudio de investigación ha tenido como objetivo promover la propuesta didáctica basada en el laboratorio matemático “Viaje en la historia de los números” como recurso estratégico que favorece las habilidades y las capacidades en la comprensión de los números reales.

Esta propuesta pedagógica ha sido aplicada y experimentada en la Institución Educativa N° 86378 “Santa Rosa” en el Centro Poblado de Uchusquillo, distrito de San Luis, Provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash. El objetivo de tal propuesta pedagógica ha sido diseñar unas estrategias didácticas que puedan ser aplicadas a las Instituciones Educativas operantes en las áreas rurales del país y que puedan facilitar el alcance de un aprendizaje significativo en el área de matemática, específicamente en el tema de los números reales.

La unidad didáctica “Viaje en la historia de los números” desarrolla, por medio de un conjunto de actividades, las capacidades y los contenidos del conjunto numérico $\mathbb{R}$, tomando como eje las capacidades y conocimientos que prevén las Rutas del aprendizaje, para los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria, en la competencia matemática “Actúa y piensa matemáticamente en situaciones de Cantidad”.

Las “Rutas del aprendizaje” para los estudiantes del VII ciclo de la EBR, en relación a los números reales, plantean como estándares que cada estudiante logre relacionar datos provenientes de diferentes fuentes de información, referidas a diversas situaciones de regularidades, equivalencias y relaciones de variación; y las

exprese en modelos de sucesiones con números racionales e irracionales, tomando como base el conjunto de los números naturales y enteros para desarrollar la comprensión integral del conjunto $\mathbb{R}$ en diversas situaciones y contextos de la cotidianidad (Collanqui Díaz, Zelarayan Adauro, Díaz Maguiña, Monteza Ahumada, & al., 2015).

Si pretendemos que el concepto de número real se asimile de forma significativa, debemos contar con un proceso cognitivo necesariamente lento, ya que los estudiantes han de integrar diferentes conjuntos numéricos, cada uno con sus especificidades en los dominios de la representación, las operaciones y las estructuras matemáticas y, además, deben alcanzar una comprensión profundidad de los procesos infinitos, en base a estrategias que ayudan los estudiantes a comprender los números reales (Crespo Crespo, 2009).

Por dicha razón, el estudiante durante el progresivo desarrollo de los diferentes laboratorios ha sido acompañado a descubrir los números reales por distintas vías: desde la reseña histórica, hasta el análisis de los logaritmos, pasando por el estudio de distintos sistemas de numeración que se han desarrollado en las diferentes civilizaciones desde los albores de la humanidad. Todo esto para que el estudiante aprenda a comprender y utilizar el conjunto de los números reales, descubra su subdivisión en conjuntos numéricos cada vez más complejos y exhaustivos, necesarios para dar solución a situaciones y necesidades siempre más exigentes.

A continuación se da una descripción específica de las actividades que se han concretizado con los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la institución educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo.

3.1 Laboratorios matemáticos aplicados

La propuesta didáctica “Viaje en la historia de los números” está compuesta por cinco laboratorios matemáticos que alternan descubrimientos históricos, curiosidades y actividades lúdicas con ejercicios y bases teóricas, para aprender el concepto de número real.

3.1.1 “Contamos como los antiguos”

La primera actividad consiste en el reconocimiento y la construcción de los diferentes sistemas de notación para los números naturales partiendo de una reseña histórica de las civilizaciones más notables de la humanidad.

Este laboratorio matemático se desarrolla en dos tiempos, el primero teórico en el cual se presenta por medio de diapositivas una reseña de los principales sistemas de numeración utilizados a lo largo de la historia, sus características peculiares, las características comunes, las innovaciones aportadas y sus limitaciones. En la segunda fase de carácter aplicativo, los estudiantes usan las informaciones recibidas en la reseña histórica. Los estudiantes reconocen el conjunto de símbolos y reglas de escritura utilizados para contar en cada sistema de numeración explorado, leen y escriben números con estos sistemas de numeración. En esta etapa se enfatiza en los procesos matemáticos de simbolización, codificación y decodificación, crítica y argumentación de los sistemas propuestos.

La primera estrategia tiene como finalidad desarrollar y formalizar la idea de número desarrollar la capacidad de reconocer y valorar las características de nuestro sistema decimal, los símbolos utilizados y el valor posicional de las cifras, comparándolo con los diferentes sistemas de numeración que han surgido, paralelamente al desarrollo del hombre en las diversas actividades que realizaban

cotidianamente; tanto para mantener la información de su contabilidad, en su deseo y necesidad de conocer y explicar su entorno y los fenómenos que caracterizaban su vida.

3.1.2 “La fracción egipcia”

Este laboratorio pretende generar en los estudiantes un conflicto cognitivo por la insuficiencia del conjunto de los números enteros “ $\mathbb{Z}$ ” y la consecuente necesidad de resolver este conflicto ampliando el conjunto numérico de los enteros a los racionales. Para generar este escenario se propone una reseña histórica de los números racionales, haciendo notar como las diferentes actividades del hombre, desde las primeras civilizaciones, impulsaban a este conflicto. Ya en el antiguo Egipto, 3000 años antes de Cristo, el reparto de terrenos cultivables, el cálculo de los impuestos, la construcción de las famosas pirámides obligaron a los “agrimensores, los funcionarios del faraón y los arquitectos a codificar y emplear la idea de fracción y descubrir un conjunto numérico más amplio”.

Por esta razón, en esta actividad el estudiante desarrolla los contenidos de las fracciones explorando los diferentes sistemas de numeración, teniendo como base específicamente el sistema de numeración egipcio. Los símbolos egipcios ayudan a manejar, reconocer e interpretar el significado de los números fraccionarios en diversas situaciones y contextos.

El docente presenta a los estudiantes una reseña histórica sobre el conjunto de los números racionales desarrollado en las diferentes civilizaciones durante la cual, los estudiantes, subrayan las partes más resaltantes del texto, identificando algunas características peculiares de cada sistema y relacionándolas a nuestro sistema actual. Terminada la presentación de la historia de las fracciones, los estudiantes, desarrollan

la actividad “Fracciones egipcias”, codificando los números racionales con el sistema egipcio, manifestando sus ventajas y desventajas para llegar a explorar las características, definición, términos, paralización de las fracciones en el sistema actual.

3.1.3 “Necesito más números”

Este laboratorio consiste en explorar un nuevo conjunto numérico, el de los Irracionales, que surgió como una contradicción en la famosa escuela de Pitágoras. Para los “pitagóricos” todas las cosas eran números, ya que una vez definida una *unidad* todo lo que nos rodea es *mensurable*, es decir, que puede medirse a través de esta unidad. Pitágoras consideraba que todo podía medirse con el uso de una unidad y de sus sub-múltiplos, es decir que toda medida correspondía a un número entero de veces la unidad, o bien un número entero de partes de la unidad (o una mezcla de ambas). En definitiva, cocientes de números enteros. Así que entre los pitagóricos se aceptaban solamente los números racionales.

Fue propio el aporte más importante y famoso de esta escuela, el descubrimiento del “Teorema de Pitágoras”, que trajo esta grandiosa contradicción, la diagonal del cuadrado de lado unitario, el nuevo número “ $\sqrt{2}$ ”.

Este problema puso en crisis a la organización pitagórica, poniendo en serios peligros la filosofía pitagórica: el mismo teorema de Pitágoras demostraba la existencia de números incommensurables. Por miedo decidieron darle, a estos nuevos números, el nombre de irracionales.

Es así que apareció un nuevo conjunto que era totalmente diverso al conjunto de los números racionales.

Por consiguiente, en esta actividad el estudiante desarrolla la capacidad de reconocer e interpretar los números decimales con infinitas cifras. Para lograr dicha capacidad los estudiantes utilizan un material concreto que es la calculadora, a través de dicho instrumento se calcula los diferentes tipos de números decimales (exactos, periódicos puros y mixtos).

Para el desarrollo del laboratorio, el docente, presenta a los estudiantes una reseña histórica sobre la contradicción pitagórica y la necesidad de extender el conjunto de los números racionales para responder a las nuevas exigencia de la sociedad humana. Luego de la presentación, los estudiantes realizan la actividad, “Necesito más números”, leen las informaciones, las interpretan y, con la ayuda de la calculadora, comparan los números racionales e irracionales. Al terminar la actividad contestan por escrito algunas preguntas sobre los números racionales e irracionales.

3.1.4 “¿Uno de ellos, uno de nosotros?”

Para esta actividad se presenta, por medio de diapositivas el “número áureo” y su presencia en una multitud de aspectos y situaciones de la vida real, desde la arquitectura clásica y moderna, el arte, la naturaleza hasta las proporciones de objetos de uso común.

Esta actividad permite a los estudiantes familiarizar con los números irracionales y explorar su difusión y por medio de este proceso comprender la densidad y completitud del conjunto numérico de los reales.

Este laboratorio matemático se desarrolla en dos tiempos, el primero teórico en el cual se presenta por medio de diapositivas una reseña del número áureo utilizado a lo largo de la historia, analizando sus características peculiares y como este ha sido considerado el símbolo de la belleza en el arte y de la perfección de la

naturaleza. En el segundo momento, de carácter aplicativo, el docente organiza, grupos de 4 integrantes; los estudiantes analizan las informaciones recibidas, comprueban la presencia de la proporción aurea en objetos de uso común, el DNI y del papel de uso fotostático A4 entre otros, luego construyen el rectángulo de oro.

Al finalizar los estudiantes interpretan el conjunto de los reales como universo numérico, analizando las diferentes características del número dorado.

3.1.5 “Dimensiones y distancias en el universo”

En esta actividad se exploran números infinitamente grandes y los números infinitésimos. Para esto los estudiantes exploran las dimensiones astronómicas como las distancias planetarias y las dimensiones microscópicas como las partículas atómicas. Los avances científicos han llevado al hombre a explorar el cosmo, a viajar en el espacio, a investigar el origen y la evolución del universo; al mismo tiempo, la necesidad de combatir enfermedades, estudiar y conocer nuestro cuerpo a impulsado la biología a nuevos y asombrantes descubrimientos. Así el hombre se encuentra a usar números tan grandes o tan infinitésimos que resultan difíciles de imaginar y el hombre, impulsado por su curiosidad, por la sed de respuestas a todas sus interrogantes, por la necesidad de resolver los problemas que la vida les propone, necesita estudiar y comprender también estos extremos.

Por tal razón esta estrategia es pertinente para que el estudiante pueda expresar de forma simplificada números que representan medidas grandes y medidas pequeñas (próximas al cero), como la distancia de los astros, las partículas de un átomo, etc.

La estrategia que se desarrolla está dividida en dos momentos; en la primera fase el docente entrega a los estudiantes una ficha de lectura “dimensiones y

distancias en el universo”, los estudiantes analizan detalladamente la lectura, examinando las características de los números en notación científica, expresando y evaluando las longitudes del meridiano.

Continuando con la actividad, los estudiantes analizan la longitud del meridiano de Greenwich y la longitud del radio ecuatorial de la Tierra en los diferentes sistemas de medida, redondeándolos y expresándolos en notación científica.

TABLA N° 1
Matriz de estrategia, conocimientos y capacidades

CAPACIDADES	ACTIVIDADES	CONOCIMIENTOS	RECURSOS	TIEMPO
• Matematiza situaciones • Comunica y representa ideas matemáticas • Elabora y usa estrategias • Razona y argumenta generando ideas matemáticas	CONTAMOS COMO LOS ANTIGUOS	– Los números naturales y los números enteros – Múltiplos y divisores. – Descomposición en factores primos	➤ Diapositivas ➤ Proyector multimedia ➤ Fichas de trabajo	90'
	FRACCIÓN EGIPCIA	– Los números racionales: fracciones	➤ Láminas ➤ Fotocopias	90'
	NECESITO MÁS NÚMEROS	– Los números irracionales	➤ Fichas de trabajo ➤ Papelógrafo	90'
	UNO DE ELLOS, ¿UNO DE NOSOTROS?	– El conjunto de los reales, la recta real, densidad y continuidad	➤ Multimedia ➤ Proyector multimedia ➤ Fichas de trabajo	90'
	DIMENSIONES Y DISTANCIAS EN EL UNIVERSO	– La notación científica	➤ Fotocopias ➤ Fichas de trabajo ➤ Papelógrafo	90'

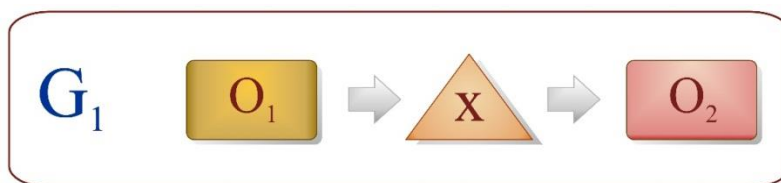
Tabla 1: Matriz de estrategia, conocimientos y capacidades de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”

IV. METODOLOGÍA

El presente trabajo de investigación es de tipo cuantitativo; de alcance correlacional y explicativo.

4.1 Diseño de la investigación

El diseño de este trabajo de investigación es experimental, de tipo pre-experimental y se diagrama de la siguiente manera:



G: Estudiantes del cuarto grado de la institución educativa “Santa Rosa de Uchusquillo”

O1: Aplicación del pre-test para evaluar el nivel de conocimientos inicial de los componentes del grupo experimental.

X: Aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”; para desarrollar el concepto de los números reales.

O2: Aplicación del post-test para evaluar los efectos del tratamiento y relacionar las variables.

4.2 Universo y población

4.2.1 Universo de investigación

Son los estudiantes y docentes de las Instituciones Educativas del distrito San Luis del Nivel de Educación Secundaria.

4.2.2 Población de investigación

La población de la presente investigación está formada por los estudiantes de cuarto grado de Educación Secundaria de las Instituciones Educativas de la provincia C.F.F.

4.2.3 Muestra de la investigación

El grupo experimental está formado por los estudiantes del cuarto grado de Educación Secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa de Uchusquillo”.

TABLA N°2
Composición del grupo experimental

GRADO	SECCIÓN	N° DE ESTUDIANTES	
		VARONES	MUJERES
Cuarto	“única”	9	11
		PORCENTAJE	
		45%	55%

Tabla 2: Composición del grupo experimental, alumnos del cuarto grado de la I.E. S. Rosa

4.3 Técnicas e instrumentos

4.3.1 Definición y operacionalización de las variables.

Las variables de estudio se diversifican de la siguiente manera:

- Variable independiente: Aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”.
- Variable dependiente: Aprendizaje de los números reales.

En la tabla 3 se presentan las dimensiones, sub-dimensiones y los indicadores de la variable dependiente utilizados para la evaluación.

TABLA N° 3
Operalización de la variable

VARIABLE	DIMENSIONES	SUB-DIMENCIONES	INDICADORES	INSTRUMENTO
APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS REALES	Comprende y analiza el conjunto de los números reales	Matematiza situaciones	Interpreta el conjunto de los reales como universo numérico	Prueba de entrada o prueba pre-test y prueba final o post-test, lista de cotejo
			Comprende la subdivisión de los reales en los diferentes conjuntos numéricos	
			Comprende el conjunto de los números reales, estableciendo relaciones entre los conjuntos de los racionales e irracionales.	
			Reconoce el conjunto de los enteros como extensión del conjunto de los naturales	
			Reconoce los números decimales y su pertenencia al conjunto de los racionales	
			Reconoce los números fraccionarios y su pertenencia al conjunto de los racionales	
			Reconoce los números irracionales y su pertenencia al conjunto de los reales	
			Clasifica los números enteros en primos y compuestos	
			Aproxima números decimales aplicando las propiedades	
			Ordena y compara los números racionales	
			Interpreta la idea de continuidad del conjunto de los reales	
			Reconoce la notación científica como sistema de representación simbólica de números muy grandes y números muy próximos al cero	
			Identifica las características de los decimales exactos y periódicos	
			Interpreta los números racionales como cociente de una fracción	
		Comunica y representa ideas matemáticas	Representa los números racionales por medio de fracciones y números decimales	
			Representa simbólicamente los números irracionales	
			Representa los números enteros por medio del producto de sus factores primos	

VARIABLE	DIMENSIONES	SUB-DIMENCIONES	INDICADORES	INSTRUMENTO
APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS REALES	Comprende y analiza el conjunto de los números reales	Comunica y representa ideas matemáticas	Representa gráficamente y simbólicamente intervalos de números reales	Prueba de entrada o prueba pre-test y prueba final o post-test, lista de cotejo
			Representa los números racionales por medio de la notación científica	
			Representa un número racional por medio de su fracción generatriz	
		Elabora y usa estrategias	Usa procesos matemáticos para hallar la descomposición de un número en sus factores primos	
			Usa estrategias para expresar números muy grandes o muy pequeños por medio de la notación científica	
			Calcula la fracción generatriz de un número decimal.	
		Razona y argumenta generando ideas matemáticas	Deduce la necesidad de extender los números naturales a los números enteros para resolver diferentes situaciones problemáticas	
			Analiza datos y procesos matemáticos para hallar la fracción generatriz de un número decimal exacto y de uno periódico.	
	Efectúa operaciones y resuelve problemas con números reales	Matematiza situaciones	Interpreta el significado de los números racionales en diversas situaciones y contextos	
			Interpreta las fracciones como un operador matemático	
			Interpreta el significado de los números irracionales en distintos contextos y situaciones significativas	
			Relaciona la potenciación con sus operaciones inversas: Radicación y logaritmo.	
		Elabora y usa estrategias	Utiliza factores primos en la descomposición de un número, mínimo común múltiplo y máximo común divisor para resolver problemas contextualizados	
			Utiliza las propiedades para realizar operaciones entre números racionales	

VARIABLE	DIMENSIONES	SUB-DIMENSIONES	INDICADORES	INSTRUMENTO
APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS REALES	Efectúa operaciones y resuelve problemas con números reales	Elabora y usa estrategias	Aplica el concepto de los números irracionales para analizar los números de infinitas cifras	Prueba de entrada o prueba pre- test y prueba final o post-test, lista de cotejo
			Aplica propiedades al realizar las operaciones con los números reales	
		Elabora y usa estrategias	Utiliza la propiedad de la potenciación con exponente entero y base entero	
			Calcula el logaritmo de un número utilizando las propiedades	
		Razona y argumenta generando ideas matemáticas	Resuelve problemas que impliquen el uso de operaciones con números racionales	
			Identifica y procesa la información al resolver problemas que implican multiplicar o dividir números reales	
			Resuelve operaciones entre logaritmos y determina si sus respuestas son razonables.	

Tabla 3: Operalización de la variable, aprendizaje de los números reales

4.3.2 Técnicas e instrumentos y matriz de evaluación.

La técnica que se ha empleado para comprobar los efectos de la variable independiente, la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, sobre la variable dependiente, el aprendizaje de los números reales, ha sido la observación por medio de dos exámenes aplicados respectivamente al empezar el experimento y al finalizar el mismo. Estas observaciones han determinado el nivel de aprendizaje, el cual ha sido cuantificado a través de una lista de cotejo, para darle mayor confiabilidad a la investigación.

Este instrumento ha sido aplicado a las pruebas de pre-test y post-test, lo que nos permite un mayor rigor en la calificación de los exámenes reduciendo al mínimo la subjetividad de los datos. La lista de cotejo, presentada en la tabla n°4, ha sido organizada en base a los indicadores en cada una de las dimensiones a evaluar con respecto a la variable dependiente. Por medio de este instrumento se ha podido verificar si los estudiantes, participando al laboratorio matemático “Viaje en la historia de los números”, han desarrollado de forma significativa el aprendizaje de los números reales.

La lista de cotejo está compuesta por 38 indicadores, agrupados en dos dimensiones generales y en ocho ítems; a través de los cuales se exploran las capacidades del estudiante en la comprensión del conjunto numérico de los reales y en la resolución de ejercicios y problemas con estos.

El primer ítem, *Marca con un aspa el conjunto o los conjuntos al que pertenece cada número*, explora las capacidades del estudiante de interpretar el conjunto de los reales como el universo numérico, comprender las subdivisiones de este en los distintos conjuntos numéricos y establecer relaciones de pertenencia entre número y conjuntos

numéricos. También evalúa la capacidad de representar simbólicamente los números reales.

En el segundo, *Descompón en producto de factores primos los siguientes números*, se reconocen las capacidades de clasificar los números enteros en primos y compuestos, determinar los factores primos de cualquier número y representar los números compuestos por medio de sus factores.

En el tercer ítem, *Representa gráficamente cada intervalo dado de manera simbólica*, se evidencia la capacidad de aproximar y ordenar números decimales, interpretar la idea de continuidad de los números reales y representar gráficamente y simbólicamente intervalos de números reales.

En el cuarto ítem, *Expresa en notación científica*, se registran las capacidades de reconocer la notación científica como sistema de representación simbólica de números muy grandes y números muy próximos al cero, y de representar los números racionales por medio de la notación científica.

En el quinto ítem, *Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales*, pretende evaluar la capacidad de identificar e interpreta las características de los números racionales, representar un número racional por medio de su fracción generatriz, calcular y analizar la fracción generatriz de un número decimal exacto y de uno periódico.

En el sexto ítem, *Resuelve los siguientes problemas con números racionales*, se explora las capacidades del estudiante de interpretar el significado y las propiedades de los números racionales en diversas situaciones y contextos, resolver problemas que implican el uso de operaciones con números racionales y utilizar factores primos en la

descomposición de un número, mínimo común múltiplo y máximo común divisor para resolver problemas contextualizados.

En el séptimo ítem, *Resuelve el siguiente problema*, se examina la capacidad de interpretar el significado y las propiedades de los números irracionales en distintos contextos y situaciones significativas e identificar y procesar la información al resolver problemas que implican multiplicar o dividir números reales.

En el octavo ítem, *Calcula los siguientes logaritmos*, se indaga la capacidad de relacionar la potenciación con sus operaciones inversas la radicación y el logaritmo y resolver operaciones entre logaritmos determinando si sus respuestas son razonable

TABLA N° 4
Lista de cotejo

DIMENCIONES	ITEMS	INDICADORES	SI	NO
Comprende y analiza el conjunto de los números reales	Marca con una $\surd$ el conjunto o conjuntos al que pertenece cada número	Interpreta el conjunto de los reales como universo numérico	1	0
		Comprende la subdivisión de los reales en los diferentes conjuntos numéricos	1	0
		Comprende el conjunto de los números reales, estableciendo relaciones entre los conjuntos de los racionales e irracionales	1	0
		Reconoce el conjunto de los enteros como extensión del conjunto de los naturales	1	0
		Reconoce los números decimales y su pertenencia al conjunto de los racionales	1	0
		Reconoce los números fraccionarios y su pertenencia al conjunto de los racionales	1	0
		Reconoce los números irracionales y su pertenencia al conjunto de los reales	1	0
		Representa los números racionales por medio de fracciones y números decimales	1	0
		Representa simbólicamente los números irracionales	1	0
		Deduce la necesidad de extender los números naturales a los números enteros para resolver diferentes situaciones problemáticas.	1	0
	Descompón en producto de factores primos los siguientes números	Clasifica los números enteros en primos y compuestos	1	0
		Representa los números enteros por medio del producto de sus factores primos	1	0
		Usa procesos matemáticos para hallar la descomposición de un número en sus factores primos	1	0
	Representa gráficamente cada intervalo dado de manera simbólica	Aproxima números decimales aplicando las propiedades	1	0
		Ordena y compara los números racionales	1	0
		Interpreta la idea de continuidad del conjunto de los reales	1	0
		Representa gráficamente y simbólicamente intervalos de números reales	1	0
	Expresa en notación científica	Reconoce la notación científica como sistema de representación simbólica de números muy grandes y números muy próximos al cero	1	0
		Representa los números racionales por medio de la notación científica	1	0
		Usa estrategias para expresar números muy grandes o muy pequeños por medio de la notación científica	1	0

DIMENCIONES	ITEMS	INDICADORES	SI	NO
Comprende y analiza el conjunto de los números reales	Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales	Identifica las características de los decimales exactos y periódicos	1	0
		Interpreta los números racionales como cociente de una fracción	1	0
		Representa un número racional por medio de su fracción generatriz	1	0
		Calcula la fracción generatriz de un número decimal	1	0
		Analiza datos y procesos matemáticos para hallar la fracción generatriz de un número decimal exacto y de uno periódico	1	0
Efectúa operaciones y resuelve problemas con números reales	Resuelve los siguientes problemas con números racionales	Interpreta el significado de los números racionales en diversas situaciones y contextos	1	0
		Interpreta las fracciones como un operador matemático	1	0
		Utiliza factores primos en la descomposición de un número, mínimo común múltiplo y máximo común divisor para resolver problemas contextualizados	1	0
		Utiliza las propiedades para realizar operaciones entre números racionales	1	0
		Resuelve problemas que impliquen el uso de operaciones con números racionales	1	0
	Resuelve el siguiente problema	Interpreta el significado de los números irracionales en distintos contextos y situaciones significativas	1	0
		Aplica el concepto de los números irracionales para analizar los números de infinitas cifras	1	0
		Aplica propiedades al realizar las operaciones con los números reales	1	0
		Identifica y procesa la información al resolver problemas que implican multiplicar o dividir números reales.	1	0
	Calcula los siguientes logaritmos	Relaciona la potenciación con sus operaciones inversas: Radicación y logaritmo	1	0
		Utiliza la propiedad de la potenciación con exponente entero y base entero	1	0
		Calcula el logaritmo de un número utilizando las propiedades	1	0
		Resuelve operaciones entre logaritmos y determina si sus respuestas son razonables	1	0

Tabla 4: Lista de cotejo aplicada a las pruebas de pre-test y de post-test.

Para poder determinar el nivel de aprendizaje de los estudiantes se han dividido los indicadores en cuatro bloques, cada uno correspondiente a una de las sub-dimensiones consideradas en el estudio de las variables. A cada indicador se le ha asignado un mismo puntaje para así dar peso a cada uno de los ítems.

En base a esto se han individuado cuatro niveles de aprendizaje; por cada nivel se asigna un rango de puntuación correspondiente.

TABLA N° 5

Escala de calificación de aprendizaje aplicada a la lista de cotejo

Rendimiento académico	Definición de aprendizaje	Nivel de aprendizaje
0-10	APRENDIZAJE EN INICIO	0 - 19
11-13	APRENDIZAJE EN PROCESO	20 - 25
14-17	APRENDIZAJE LOGRADO	26 - 33
18-20	APRENDIZAJE DESTACADO	34 - 38

Tabla 5: Escala de calificación de aprendizaje aplicada a la lista de cotejo con 38 indicadores.

Esta escala numérica representa el juicio más honesto respecto al logro de aprendizaje del estudiante en cuanto en la comprensión y la resolución de ejercicios y problemas de los números reales.

La siguiente tabla facilita una interpretación lógica y significativa de los puntajes estándares del test de comprensión de los números reales, asignado por el D.C.N.

TABLA N° 6
Escala de calificación de los aprendizajes en la Educación Básica Regular

NIVEL DE RENDIMIENTO	NIVEL DE APRENDIZAJE	DEFINICIÓN
20 -18	Logro destacado	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos, demostrando incluso un manejo solvente y muy satisfactorio en todas las tareas propuestas.
17 – 14	Logro previsto	Cuando el estudiante evidencia el logro de los aprendizajes previstos en el tiempo programado.
13 – 11	En proceso	Cuando el estudiante está en camino de lograr los aprendizajes previstos, para lo cual requiere acompañamiento durante un tiempo razonable para lograrlo.
10 – 00	En inicio	Cuando el estudiante está empezando a desarrollar los aprendizajes previstos o evidencia dificultades para el desarrollo de estos y necesita mayor tiempo de acompañamiento e intervención del docente de acuerdo con su ritmo y estilo de aprendizaje.

Tabla 6: Modificada de “Diseño curricular Nacional de Educación Básica Regular”, Ministerio de Educación 2009

Para dar mayor validez al instrumento de evaluación los resultados del nivel de confiabilidad se ha tomado con la prueba Kuder Richardson 20, como se muestra de la siguiente manera:

TABLA N° 7

Prueba Kuder Richardson 20	
PRE - TEST	0.66
POST - TEST	0.75

Tabla 7: Prueba kr 20 para medir la confiabilidad de la muestra

Como se muestra en la tabla n° 7, la prueba de Kuder Richardson 20 demuestra que el instrumento de evaluación tiene una confiabilidad alta ya que en el pre-test se obtuvo un valor de $kr = 0.66$, encontrándose dentro del intervalo 0.61 - 0.80. A si mismo se evidencia que la confiabilidad es alta en la prueba del post-test por tener un valor $kr_{20} = 0.74$; es decir la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números” ha mejorado significativamente en el

aprendizaje de los números reales, porque el nivel de significancia ha mejorado en un 8%, y se encuentra en el intervalo 0.61 -0.80.

4.4 Plan de análisis

Para comprobar las hipótesis de la investigación se ha aplicado, a los dos grupos de datos recogidos en el pre-test y en el post-test, una prueba preliminar para verificar el supuesto de normalidad. Siendo los dos grupos de datos constituidos por un número de casos inferior a 30, se ha utilizado la prueba de Shapiro-Wilk.

Una vez verificado que los dos grupos presentan una distribución normal, para contrastar las variables, se ha empleado la prueba paramétrica para la comparación de las medias, T de Student para muestras relacionadas, con un nivel de significancia del 5 % tal como se precisa en las investigaciones referidas a las ciencias sociales.

La toma de esta decisión ha sido conducida por el tipo de experimento realizado, estudio longitudinal con dos medidas, y por el tipo de variable dependiente, tal como se presenta en la tabla siguiente.

TABLA N° 8

		Variable dependiente			
		Nominal Dicotómica	Nominal Politómica	Ordinal	Numérica
Variable independiente		Pruebas no paramétricas			Pruebas paramétricas
Estudio transversal Muestras independientes	Un Grupo	X² Bondad de ajuste Binomial	X² Bondad de ajuste	X² Bondad de ajuste	T de Student una muestra
	Dos grupos	X² Bondad de ajuste Corrección de Yates Test exacto de Fisher	X² de Homogeneidad	U Mann-Withney	T de Student muestras independientes
	Más de dos grupos	X² Bondad de ajuste	X² Bondad de ajuste	H Kruskal-Wallis	ANOVA con un factor INTERSUJETOS
Estudio longitudinal Muestras relacionadas	Dos medidas	Mac Nemar	Q de Cochran	Wilcoxon	T de Student muestras relacionadas
	Más de dos medidas	Q de Cochran	Q de Cochran	Friedman	ANOVA para medidas repetidas INTRASUJETOS

Tabla 8: prueba paramétrica: T de student.

El procesamiento y análisis de los datos se han realizados con el programa estadístico SPSS versión 20.

V. RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados obtenidos en la experimentación

5.1 Resultados

Esta investigación ha tenido como objetivo general, determinar la influencia de la aplicación de la propuesta didáctica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque significativo, para mejorar la comprensión de los números reales, en los estudiantes del cuarto grado sección única de Educación Secundaria de la Institución Educativa Pública “Santa Rosa” de Uchusquillo.

Los resultados, se han analizado considerando los siguientes tres objetivos específicos, planteados en el presente trabajo de investigación:

- Determinar el nivel real de aprendizajes matemáticos y específicamente de los números reales en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la institución educativa Santa Rosa de Uchusquillo, en el año académico 2016 a través de un pre-test.
- Determinar el nivel real de aprendizajes matemáticos y específicamente de los números reales en los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, en el año académico 2016 a través de un post-test.
- Contrastar los resultados de las pruebas del pre-test y post-test, para determinar si la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece la enseñanza de los números reales a los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa “Santa Rosa” de

Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash, Perú en el año académico 2016.

5.1.1 Nivel real de comprensión y resolución de problemas de los números reales antes de la aplicación de la propuesta “Viaje en la historia de los números”

En relación con el primer objetivo específico, se presentan los resultados de la prueba de pre-test, aplicada el 01 de setiembre del año 2016.

TABLA N°9

Nivel de comprensión de los números reales de los estudiantes del cuarto grado sección única de la I.E "Santa Rosa" de Uchusquillo

Rendimiento académico	Nivel de aprendizaje	Definición de aprendizaje	pre -test	
			fi	h%
0 – 10	0 - 19	APRENDIZAJE EN INICIO	0	100%
11 – 13	20 - 25	APRENDIZAJE EN PROCESO	0	0%
14 – 17	26 - 33	APRENDIZAJE PREVISTO	0	0%
18 - 20	34 - 38	APRENDIZAJE DESTACADO	20	0%
TOTAL			20	100%

Tabla 9: Resultados de la prueba del pre-test aplicada el día 01 de setiembre de 2016

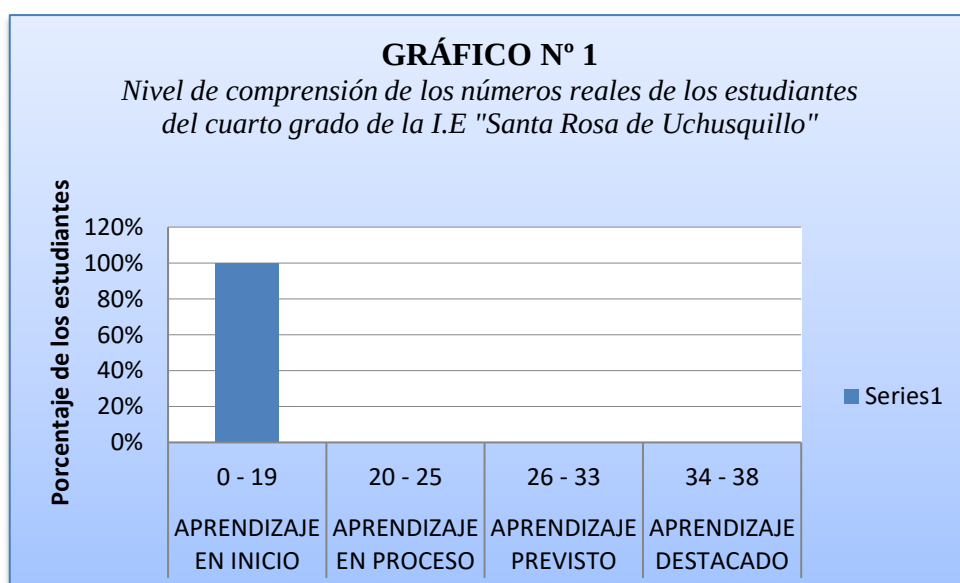


Figura 1: Resultados de la prueba de pre-test aplicada el 01 de setiembre de 2016

Analizando la tabla n° 7 y el gráfico n°1 se puede observar que 20 estudiantes, correspondiente al 100% del grupo experimental, se encuentran en un nivel de comprensión de los números reales en inicio, obteniendo una calificación dentro del intervalo de “0-10”. Profundizando en el análisis de la prueba del pre-test, identificamos que todos los estudiantes han alcanzado una puntuación que varía de mínimo de 1 hasta un máximo de 6 puntos además registrando una media de 2. Esto evidencia claramente una dificultad en la comprensión de los números reales y un nivel de aprendizaje por debajo de los estándares planteados por los documentos curriculares.

5.1.2 Referente al objetivo específico: nivel de comprensión y resolución de ejercicios y problemas de los números reales en los estudiantes a través del post-test.

TABLA N° 10

Nivel de comprensión de los números reales de los estudiantes del cuarto grado sección única de la I.E "Santa Rosa de Uchusquillo"

Rendimiento académico	Nivel de aprendizaje	Definición de aprendizaje	Post - test	
			fi	h%
0 – 10	0 - 19	APRENDIZAJE EN INICIO	0	0%
11 – 13	20 - 25	APRENDIZAJE EN PROCESO	1	5%
14 – 17	26 - 33	APRENDIZAJE PREVISTO	11	55%
18 - 20	34 - 38	APRENDIZAJE DESTACADO	8	40%
	TOTAL		20	100%

Tabla 10: Resumen de los resultados obtenidos en la prueba de post-test del 30 de septiembre de 2016

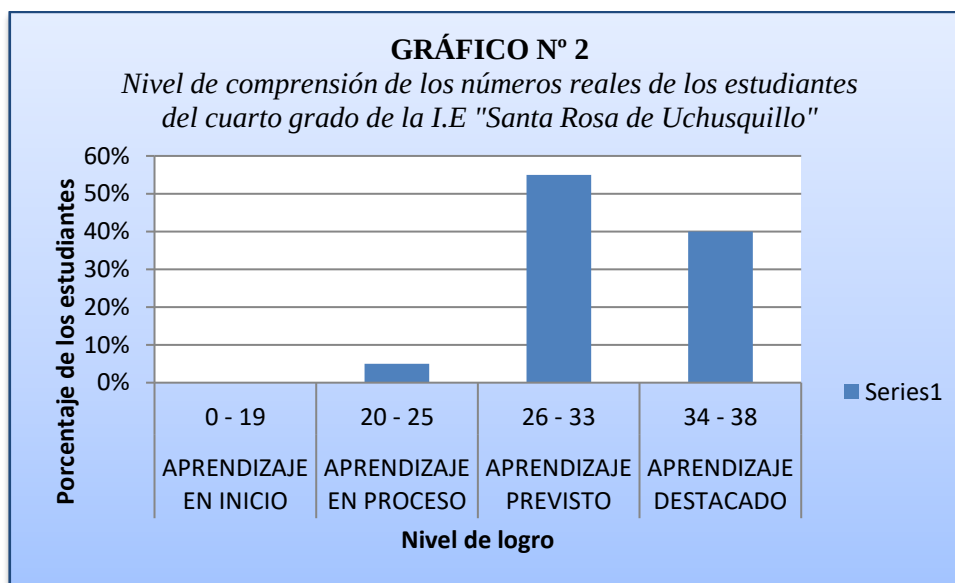


Figura 2: Resultados de la prueba de pos-test aplicada el 30 de septiembre de 2016

En la tabla n° 8 y gráfico n° 2 se observa que el 95% de los estudiantes alcanzó un nivel de aprendizaje satisfactorio respecto a los estándares que propone el Ministerio de Educación para los contenidos específicos de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, además resalta que el 40% de los integrantes al grupo experimental logró comprender los números reales en un nivel de aprendizaje destacado alcanzando calificaciones que varían dentro del intervalo de notas comprendido entre 18 - 20.

Los datos recogidos en el pos-prueba evidencian al mismo tiempo que un 5% de los estudiantes, también si ha superado un nivel de aprendizaje considerado en inicio, se ha ubicado dentro del rango considerado como aprendizaje en proceso, demostrando una necesidad persistente de afianzamiento.

En la prueba del post-test los estudiantes alcanzaron una puntuación que varía de un mínimo de 25 puntos a un máximo de 37 puntos, con una media de 31,65. La observación de los resultados presentados evidencia una significativa mejora en la comprensión y resolución de ejercicios y problemas de los números reales de la totalidad de los estudiantes. De tal forma también, demuestra la validez de la

propuesta aplicada; puesto que todos los estudiantes han superado el nivel de aprendizaje en inicio.

5.1.3 Comparación de los resultados del pre-test y del post-test para determinar si la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números” favorece el desarrollo de los números reales

Para comparar los resultados de la prueba de pre-test y los de la prueba de post-test, a fin de verificar las hipótesis, se ha aplicado, como prueba preliminar, el test de normalidad siendo esto un factor prioritario para poder analizar los datos y hacer una inferencia estadística de la muestra a la población. Por ser una muestra conformada de 20 estudiantes se ha aplicado, tanto al conjunto de datos del pre-test como al del post-test, la prueba de Shapiro–Wilk. Esta prueba, como se presenta a continuación, demuestra que ambos grupos tienen una distribución normal.

TABLA N° 11

Prueba de normalidad Shapiro-Wilk

	Estadístico	gl	Sig.
PRE-TEST	0,924	20	0,116
POST-TEST	0,911	20	0,066

Tabla 11: Prueba de normalidad aplicada a los dos conjuntos de datos

La comparación de los resultados registrados en el pre-test y en el post-test evidencia que la totalidad de los estudiantes, después de la aplicación del laboratorio matemático “Viaje en la historia de los números” ha obtenido un mejor resultado superando las dificultades evidenciadas por la pre-prueba. Este dato puede apreciarse observando el siguiente gráfico

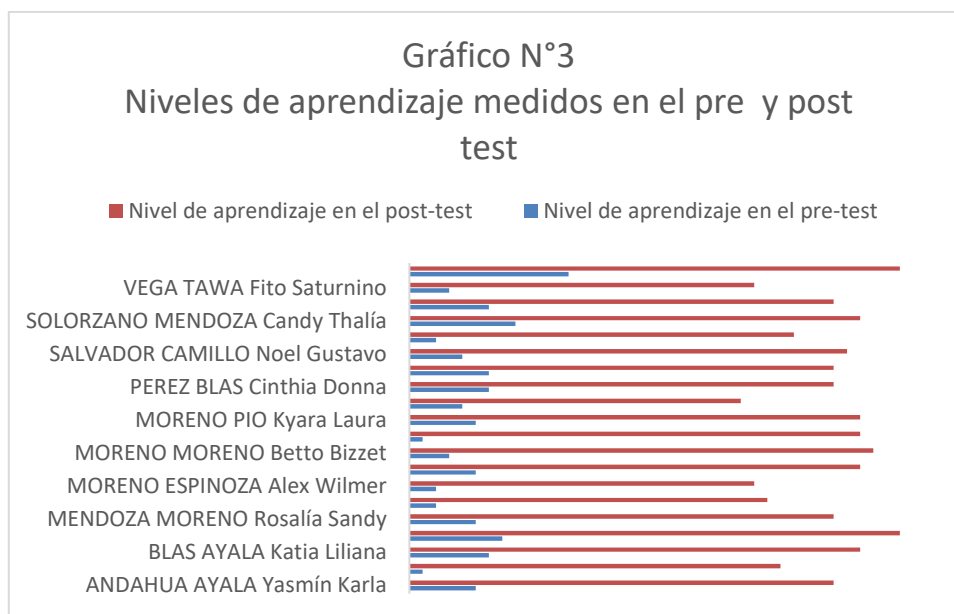


Figura 3: niveles de aprendizajes mediados en el pre y post-test

Finalmente para contrastar las hipótesis y establecer si existe una relación significativa entre la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números” y las mejoras observadas en el nivel de aprendizaje de los números reales se ha aplicado la prueba paramétrica T de Student para muestras relacionadas:

TABLA N° 12
Prueba t de muestras correlacionadas

Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia				
			Inferior	Superior			
27,000	2,865	0,641	25,659	28,341	42,140	19	0,000

Tabla 12: Prueba t de muestras correlacionadas

La prueba T de Students, muestra que existe una relación significativa entre la variable independiente, aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, y la variable dependiente, aprendizaje significativo de los números reales, evidenciando un cambio significativo entre las mediciones del pre-test y del post-test. Siendo que, la significancia es inferior a 0,05, es decir inferior al 5%, se

rechaza la hipótesis nula y se considera verificada positivamente la hipótesis de investigación.

Por consecuencia se afirma que la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, ha tenido una influencia significativamente positiva en el desarrollo de la idea de número real, en el conocimiento y uso del conjunto numérico de R.

5.1.4 Contrastación del rendimiento académico

Para evidenciar con claridad y de manera didáctica, la influencia de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números” sobre el aprendizaje de los números reales, presentamos a continuación un gráfico de cajas:

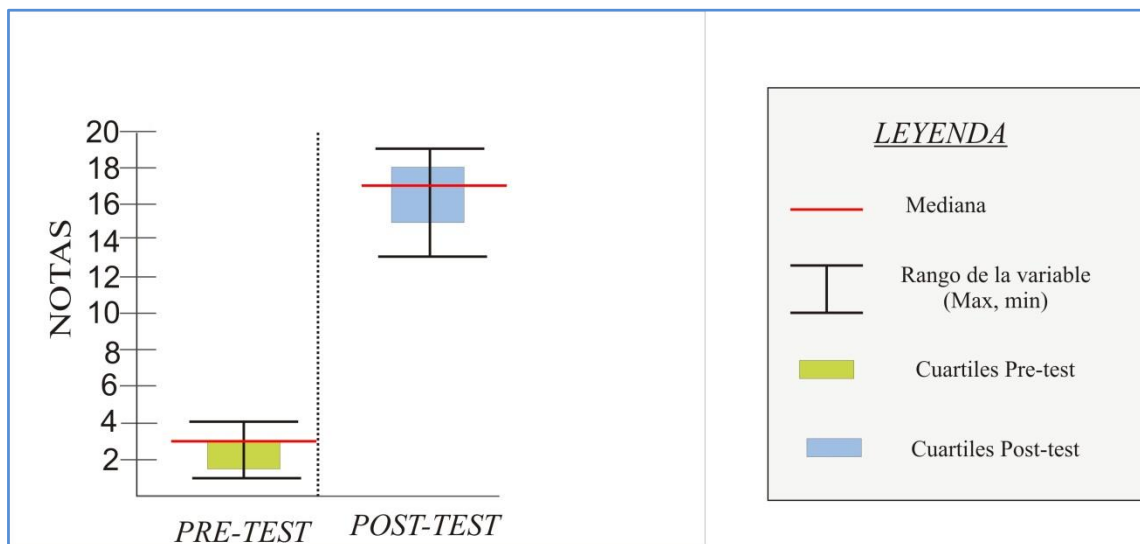


Figura 4: gráfico de cajas y bigotes

En el gráfico se observa una comparación de las notas obtenidas de los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria, de la institución educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo en el pre-test y el post-test, para analizar el rendimiento académico del grupo pre-experimental en la comprensión de los números reales, se encontraron las siguientes situaciones:

La media aritmética del rendimiento académico obtenida en el Pre-test es 2, asimismo se aprecia que el valor mínimo de las notas alcanzadas es 1 y la nota máxima es 6.

Además se observa que dentro del primer cuartil, el 25% de los estudiantes han obtenido una nota máxima de 1; en el segundo cuartil las notas alcanzadas son menores o iguales que 3, además dicha nota coincide con la mediana. Por último se aprecia que el 75% de las notas alcanzadas son menores o iguales a 3.

Mientras que en el Pos-test el promedio obtenido por dichos estudiantes es 17, la nota mínima es 13 y la nota máxima es 19.

Del mismo modo se pueden apreciar que en el primer cuartil las notas obtenidas son menores o iguales que 15; además el 50% de las notas alcanzadas son menores o iguales a 17, coincidiendo con la mediana, y por último, en el tercer cuartil, se aprecian notas menores o iguales a 18.

5.2 Interpretación de los resultados

Se expone a continuación una interpretación de los resultados presentados en el párrafo 5. De la misma manera que la presentación, también la interpretación de los resultados se organiza coherentemente a los objetivos específicos y a las hipótesis planteadas en la presente investigación.

5.2.1 Interpretación del nivel real de comprensión de los números reales en los estudiantes del cuarto grado a través de un pre-test.

El aprendizaje de la noción de número es un largo proceso que se empieza a desarrollar desde el inicio de la EBR; los estudiantes adquieren y construyen estos conocimientos en forma progresiva. En primaria y en el primer grado de secundaria se enfatizan los números naturales, en segundo y tercer grado de secundaria se

profundiza el estudio de los números enteros y racionales formalizando su construcción, en el curso del cuarto grado se culmina la formalización de los conjuntos numéricos con la construcción de los números reales. Por tal motivo los resultados obtenidos en la preprueba son muy preocupantes, demostrando una situación alarmante.

En la tabla n° 7 y el gráfico n° 1, se observa que los resultados arrojados en el pre-test evidencian que los estudiantes del grupo experimental demostraron carencia de habilidades y técnicas para resolver ejercicios y problemas con los números reales. En el pre-test se halló que el 100% de los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa pública “Santa Rosa” de Uchusquillo, obtuvieron un nivel de comprensión de los números reales dentro del intervalo 0-10, esto significa que los estudiantes se encuentran en un nivel de aprendizaje en inicio.

Analizando detenidamente los puntajes obtenidos en la lista de cotejo, observamos, en relación a las dos dimensiones establecidas los siguientes resultados:

- en la primera dimensión “Comprende y analiza el conjunto de los números reales”, se observó que la mayoría de los estudiantes no reconocía el conjunto al que pertenece cada número, esto se puede afirmar analizando el indicador: comprende la subdivisión de los reales en los diferentes conjuntos numéricos. Por otra parte se observó, que los estudiantes carecían de los conceptos de divisibilidad de los números enteros, esto se evidencia porque dichos estudiantes no usaron los procesos matemáticos para hallar la descomposición de un número en sus factores primos.

- A demás el pre-test demostró que los estudiantes del cuarto grado en la segunda dimensión “efectúa operaciones y resuelve problemas con números reales” tenían pocos conocimientos del conjunto de los números racionales e irracionales; esto demuestra que la totalidad del grupo experimental no utilizó estrategias para expresar números infinitamente grandes o infinitesimales por medio de la notación científica, ni aplicó el concepto de los números irracionales para analizar los números de infinitas cifras. Esto evidencia claramente que los estudiantes tenían pocos saberes previos, que mostraban debilidades en los conjuntos numéricos de los enteros y de los racionales contenidos propios del VI ciclo de la EBR. Por otro lado se observó que algunos estudiantes tenían algunas ideas sobre el concepto de los números enteros, pudiendo reconocer el conjunto numérico como extensión de los naturales.
- Otra observación que resalta de estos resultados es que la mayoría de los estudiantes lograron representar gráficamente los intervalos dados de manera simbólica, ordenando y comparando los números racionales; pero la mayoría de ellos no logró aproximar números decimales aplicando las propiedades ni interpretar la idea de continuidad del conjunto de los reales.

5.2.2 Interpretación del nivel real de comprensión de los números reales en los estudiantes del cuarto grado a través de un post-test

En la tabla nº 8 y en el gráfico 2 se ha encontrado que, después de aplicar el post-test un 40% de los estudiantes han logrado alcanzar el nivel de logro destacado, alcanzando calificaciones que varían dentro del intervalo de notas comprendido entre

18 - 20 en la comprensión de los números reales, utilizando laboratorios matemáticos.

Así mismo se ve que el 55% de los estudiantes ha alcanzado el nivel de logro previsto, alcanzando un nivel de aprendizaje satisfactorio respecto a los estándares que propone el Ministerio de Educación.

Esto demuestra que la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo y utilizando laboratorios matemáticos, favorece la comprensión de los números reales; ya que se ha visto una mejora sustancial en las dos dimensiones previstas en la unidad:

- En la primera dimensión “Comprende y analiza el conjunto de los números reales”, se verificó una mejora significativa, esto demuestra que la totalidad de los estudiantes interpretaron, comprendieron, reconocieron y representaron, el conjunto o conjuntos al que pertenece cada número. Del mismo modo se hizo visible que la mayoría de los estudiantes lograron comprender el concepto de los números enteros y racionales; esto se puede afirmar analizando profundamente los siguientes indicadores: Usa procesos matemáticos para hallar la descomposición de un número en sus factores primos, reconoce la notación científica como sistema de representación simbólica de números muy grandes y números muy próximos al cero e interpreta los números racionales como cociente de una fracción para calcular la fracción generatriz.
- Por otro lado en la segunda dimensión “Efectúa operaciones y resuelve problemas con números reales” se verificó que la mayoría de los estudiantes

logró aplicar el concepto de los números racionales e irracionales, esto se evidenció en la resolución de ejercicios y problemas. Pero también se observa que la mayoría de los estudiantes de dicho grupo experimental no logró relacionar la potenciación con sus operaciones inversas: radicación y logaritmo.

5.2.3 Interpretación de la hipótesis de la investigación

Se demostró claramente la influencia de la variable independiente: “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, utilizando material concreto sobre la variable dependiente “aprendizaje significativo de los números reales”, en un primer momento con la prueba de rangos y luego a través de la prueba T de Students, las cuales revelan claramente que existe diferencia significativa entre el nivel de comprensión de los números reales obtenidos en el pre-test y en el post-test. Esto nos lleva a indicar que la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, utilizando laboratorios matemáticos, contribuyó a mejorar la comprensión de los números reales en los estudiantes del cuarto grado.

Los logros en el proceso de la enseñanza y aprendizaje de los números reales se han alcanzado, gracias al apoyo de los laboratorios matemáticos y las experiencias cotidianas de los estudiantes, porque estos potencian las capacidades cognitivas, fomentando una buena atención y disposición en los estudiantes para la comprensión entretenida de los contenidos.

VI. CONCLUSIONES

Al concluir la aplicación de la propuesta “Viaje en la historia de los números” basada en el enfoque del aprendizaje significativo, utilizando laboratorios matemáticos, para mejorar la comprensión de los números reales, y llevando a cabo el proceso de revisión y análisis de los resultados, se llegó a las siguientes conclusiones:

- El nivel de aprendizaje de los números reales que presentaron los estudiantes del cuarto grado sección única fue deficiente. Tenían pocos conocimientos previos y habilidades para resolver los ejercicios y problemas con los números reales; esto se verificó en la prueba del pre-test, obteniendo un nivel de aprendizaje en inicio en relación a los logros de aprendizaje.
- La aplicación de la propuesta “Viaje en la historia de los números” basada en el enfoque del aprendizaje significativo, utilizando laboratorios matemáticos, fue efectiva debido a que aumentaron los resultados referidos al nivel de logro. Esto se verificó, con la prueba del post-test ya que, luego de la aplicación de la propuesta “Viaje en la historia de los números”, los estudiantes se ubicaron en un nivel de aprendizaje en proceso, previsto y destacado.
- Se verificó la hipótesis planteada: que la aplicación de la propuesta pedagógica “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, favorece la enseñanza de los números reales a los estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución

Educativa “Santa Rosa” de Uchusquillo, distrito de San Luís, provincia de Carlos Fermín Fitzcarrald, Ancash, Perú en el año académico 2016.

6.1 **Recomendaciones.**

Para aprender significativamente los números reales se presentan algunas sugerencias:

- se recomienda, a los docentes de matemática que apliquen estrategias y técnicas para desarrollar los contenidos de los números reales y que empleen la propuesta “Viaje en la historia de los números”, basada en el enfoque del aprendizaje significativo, utilizando laboratorios matemáticos. Que desempeña el atención del estudiante a través de una reseña histórica de los números, pasando por varias civilizaciones
- en general, se sugiere que se utilicen materiales concretos, laboratorios matemáticos y situaciones contextualizadas al entorno del estudiante, ya que el aprendizaje es significativo, si se relacionan los nuevos contenidos con las situaciones de la cotidianidad.
- es importante que los docentes den un seguimiento progresivo en el proceso de enseñanza aprendizaje en los estudiantes durante el desarrollo de cada sesión de aprendizaje, para crear la conciencia que todas las actividades que realizamos, están colegiadas entre ellas en un único grande juego matemático.

BIBLIOGRAFÍA

- Crespo Crespo, C. (2009). *ACERCA DE LA COMPRENSIÓN Y SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES EN EL AULA DE MATEMÁTICA*. Buenos Aires: Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN. (México).
- A.F.I.E., A. F. (2012). *RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, PROPEDEUTICA PARA LAS CIENCIAS*. Lima: Lumbreras.
- Álvarez, F. P. (2012). *DIFERENCIAS EN LA CALIDAD DE LA EDUCACIÓN E INEFICIENCIA: un análisis basado en el método de frontera estocástica*. Caracas: CAF.
- Arch Tirado, D. E. (2007). *LA IMPORTANCIA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL DESARROLLO COGNITIVO*. México: Universidad Tecnológica de México.
- Ausubel, D. (1976). *PSICOLOGÍA EDUCATIVA: un punto de vista cognoscitivo*. México.
- Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *SISTEMAS NUMÉRICOS Y SU DIDÁCTICA PARA MAESTROS*. Granada: Universidad de Granada.
- Collanqui Díaz, P. D., Zelarayan Adauto, M. E., Díaz Maguiña, M. I., Monteza Ahumada, W. B., & al., e. (2015). *RUTAS DEL APRENDIZAJE: ¿Qué y cómo aprenden nuestros adolescentes?* Lima: Amauta Impresiones Comerciales S.A.C.
- Crespo Crespo, C. (2009). *ACERCA DE LA COMPRENSIÓN Y SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES EN EL AULA DE MATEMÁTICA*. Buenos Aires: Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. CICATA–IPN. (México).
- Flores Gil, F. L. (2008). *HISTORIA Y DIDÁCTICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES*. sevilla: Íttakus, sociedad para la información, S.L.
- Ganimian, A. J. (2015). *BAJOS RESULTADOS, ALTAS MEJORAS ¿cómo les fue a los estudiantes peruanos en las últimas evaluaciones internacionales?* Lima: Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes, Ministerio de Educación del Perú.
- García Jiménez, M. d. (2009). *ORIGEN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN: Aplicaciones didácticas. innovación y experiencias educativas*, 1-14.
- Guadalupe Mendizábal, C. (2013). *PISA 2012: primeros resultados*. Lima: MINEDU.

- Huerta Rosales, M. (2007). *EL CURRÍCULO ESCOLAR*. Editorial San Marcos.
- Jarne, G., Minguillón, E., & Zabal, T. (s.f.). *NÚMEROS REALES Y NÚMEROS COMPLEJOS*. Proyecto de innovación Aragón tres.
- Jurgensen, R. C., Donnelly, A. J., & Dolciani, M. p. (1968). *GEOMETRÍA MODERNA: Estructura y método*. México: Publicaciones Culturales S. A.
- Martínez, P. F. (2001). *DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA*. México: Síntesis educación.
- Mendoza, J. Q. (2006). *GUÍA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO A TRAVÉS DE LA MATEMÁTICA*. Lima: Ministerio de Educación República del Perú.
- MINEDU. (2014). *RESULTADOS DE EVALUACIÓN CENSAL DE ESTUDIANTES. ECE 2014*. Lima: Oficina de Planificación Estratégica y Medición de la Calidad Educativa.
- Moreira, M. A. (s.f.). *APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO: Un concepto subyacente*. porto alegre - Brazil.
- Pacheco, A. (2004). *APRENDIENDO A ENSEÑAR, ENSEÑANDO A APRENDER EN LA UNIVERSIDAD*. Lima: Realidad Visual.
- Peggy, A., Newby, E., & Timothy, J. (1993). CONDUCTISMO, COGNITIVISMO Y CONSTRUCTIVISMO: una comparación de los aspectos críticos desde la perspectiva del diseño de instrucción. (6(4)).
- Pimienta, P. J. (2005). *METODOLOGÍA CONSTRUCTIVISTA*. México: Pearson Educacion.
- Primo Martínez , Á., Pérez Manrique, C., Serrano Sotelo, G., Suárez Lago, L., Andrés Andrés , L. F., Grajal Alonso, L., y otros. (1995). *MATEMÁTICAS 3º E.S.O.* Salamanca: Hespérides.
- Remedios Macías, H. (2009). EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE NÚMERO. *Revista on -line*, 1-20.
- Saavedra Salas, R., Collanqui Díaz, P. D., Arroyo Guzmán, D. J., & Saavedra Salas, H. (2013). *RUTAS DEL APRENDIZAJE: ¿Qué y cómo aprenden nuestros adolescentes?* Lima: Corporación Gráfica Navarrete S.A.
- Santos Moreno, A. (2000). LA TECNOLOGÍA EDUCATIVA ANTE EL PARADIGMA CONSTRUCTIVISTA. *Revista Informática Educativa*, 13(1).

Zeballos, M. C. (s.f.). *LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN EN LA HISTORIA*.
ministerio de educación presidencia de la nación.

ANEXO

Contamos como los antiguos

RESEÑA HISTÓRICA SOBRE LA IDEA DE
NÚMERO

LOS NÚMEROS: UNA NECESIDAD PARA EL HOMBRE

Los números *naturales* en la historia, aparecen involuntariamente junto al hombre.

Desde siempre el hombre tuvo la necesidad de contar y representar las actividades más importantes que realizaba durante el día.

El hombre empezó a identificar, distinguir y representar las cosas que lo rodeaban a través de cosas concretas, manipulables: marcas en huesos, trozos de madera o montoncitos de piedra, etc.

Comparando cantidades por medio de relaciones biunívocas (miembro a miembro), el hombre comenzó a construir el concepto de número.

LOS PRIMITIVOS

En una tribu primitiva, para "contar" el rebaño de ovejas se procedía así: por cada oveja que salía de la cueva ponían una piedra en un montón; para comprobar que a la vuelta estaban todas, iban quitando una piedra por cada oveja que entraba. Si al final no quedaba piedra alguna, estaban todas.



¿CÓMO MANTENER LA INFORMACIÓN EN EL TIEMPO?

Muy pronto el hombre tuvo la necesidad de registrar las informaciones:

- Su contabilidad
- Las medidas
- El pasar del tiempo

De esta manera surgió la necesidad de representar simbólicamente los números.

¡ Nacen los sistemas de numeración!

Los sumerios (finales del IV milenio a.C.)

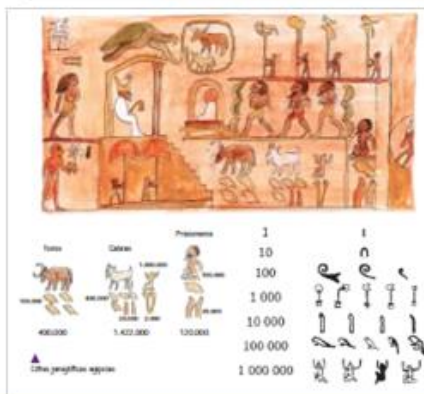
Civilización ubicada en la baja Mesopotamia entre las cuencas de los ríos Tigris y Eufrates.

Representaban los números, a través de una escritura cuneiforme, en tablillas de arcilla, que eran el papel de la época.

Los sumerios no utilizaban el número cero y contaban utilizando la base 60: "sistema sexagesimal".

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
20	30	40	50	60

Los egipcios (alrededor del año 3000 a.C.)



Es en Egipto que se encuentran los primeros textos matemáticos (Papiro Rhind de Egipto, 1650 a.C.).

El sistema egipcio era de tipo decimal, aditivo mediante jeroglíficos y no posicional.

Con este podían representar números superiores al millón.

Se utilizaban jeroglíficos para representar la unidad y las seis primeras potencias del 10.

Sistema de numeración chino (1500 a.C.)

Sistema híbrido que combinaba el principio aditivo con el multiplicativo en base diez y que tenía en cuenta el orden de escritura.

El sistema chino empleaba una serie de trece ideogramas para las unidades, la decena, la centena, el millar y decena de millar. Utilizando combinaciones de estos para obtener la cifra deseada.

Los chinos por primeros utilizaron los números negativos.

一 1	六 6	
二 2	七 7	百 100
三 3	八 8	千 1000
四 4	九 9	萬 10000
五 5	十 10	

Los griegos, (600 a.C.)

La numeración Ática era aditiva en base diez.

Empleaban trazos verticales repetitivos.

Para 5, 10 y 1000, usaban una letra:

5 (pente)

10 (deka),

1000 (khiloi)



	∟	Δ	∏	H	Ϟ	X	Ϡ	M
1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000

Los símbolos de 50, 500, 5000, los obtenían por el principio multiplicativo, añadiendo el signo de 10, 100, 1000, al de 5.

La numeración de los Maya (300-400 a.C.)

1	2	3	4	5
•	• •	• • •	• • • •	—
6	7	8	9	10
• —	• • —	• • • —	• • • • —	==
11	12	13	14	15
• ==	• • ==	• • • ==	• • • • ==	===
16	17	18	19	20
• ===	• • ===	• • • ===	• • • • ===	⊖

Su sistema de numeración era de base veinte.

Sólo utilizaron tres símbolos muy sencillos para representar todos los números.

- El punto
- La raya
- La representación del cero

Los romanos

Los romanos usaron el alfabeto latino para los símbolos de sus números.

El sistema romano es quinario y aditivo.

Es actualmente en uso para los números ordinales.

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

LOS HINDÚES (III siglo a.C.)

Los hindúes, alrededor del siglo III a. c., comenzaron a poner por escrito los números de 9 cifras.

Fue la primera civilización en utilizar el sistema de numeración posicional.

La gran innovación hindú fue la invención de un símbolo especial para una hilera intacta del ábaco, ésta fue la representación gráfica del cero.

En el año 628 Brahmagupta utiliza asiduamente este sistema de numeración posicional.



Define el infinito matemático como el inverso del cero.

Formaliza el uso de los números negativos.

De los hindúes hasta nuestro sistema de numeración

El sistema actual fue inventado por los hindúes indios y transmitido a Europa por los árabes en el siglo XVI

Cuando los árabes conquistaron el norte de la India conocieron este sistema de numeración y al darse cuenta de lo mucho que facilitaba los cálculos, lo adoptaron.

Ahora se escribe así:

0, 1, 2, 3, 4,
5, 6, 7, 8 y 9.

١	٢	٣	٤	٥
1	2	3	4	5
٦	٧	٨	٩	٠
6	7	8	9	0

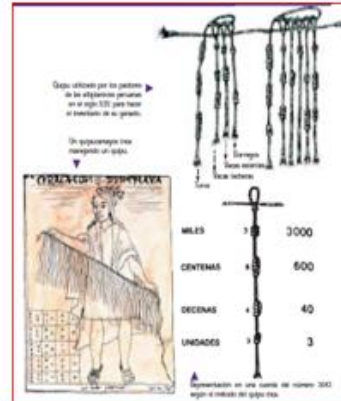
Grafía habitual en el Califato de Bagdad

Los Incas y el Quipu (siglo XV d.C.)

El quipu se utilizaba para registrar datos importantes, como la cantidad de producción de las cosechas, el número de habitantes, etc.

Sólo podía ser leído por personas especializadas, denominados Kipucamayocs.

Sobre una cuerda colgante había varios puntos de referencia a distintas alturas. En la referencia inferior se hacían tantos nudos como fuera necesario para las unidades, en la segunda para las decenas y así sucesivamente.



El número áureo

El número áureo

El **número áureo**, también denominado:

“número de oro”

“número dorado”

“sección áurea”

“razón áurea”

“razón dorada”

“media áurea”

“divina proporción”

representado por la letra griega Φ (fi) (en honor al escultor griego Fidias), es Número irracional:

El número áureo

- El número áureo surge de la división en dos de un segmento guardando las siguientes proporciones: La longitud total $a+b$ es al segmento más largo a , como a es al segmento más corto b .
- Si queremos dividir un segmento en dos partes distintas podemos hacerlo de varias formas: que la parte mayor sea el doble, o el triple (o cualquier otra relación), de la menor. Sólo hay una forma de hacer la división si queremos que la relación que guardan entre sí todo el segmento y el trozo mayor sea igual a la que guardan el trozo mayor y el menor. Esto se consigue dividiendo el segmento original entre el número de oro (Φ).

El número áureo

- El número áureo es la proporción que guardan dos segmentos a y b , que cumplen la siguiente condición:

La suma de los dos segmentos es al segmento mayor, como el segmento mayor es al menor

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

- El número áureo φ es igual al cociente entre a y b

$$\varphi = \frac{a}{b}$$

El número áureo

- El valor numérico de φ está dado por el siguiente cociente:

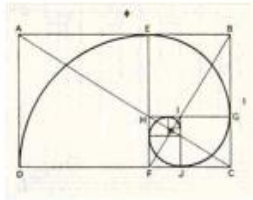
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

1,61803398874898...

El número áureo

- Se trata de un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad" sino como relación o PROPORCIÓN entre partes de un cuerpo o entre cuerpos, que encontramos en la naturaleza en la morfología de diversos elementos tales como caracolas, nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, proporciones humanas, etc.
- Esta proporción también la encontramos en numerosas obras de arte...

Concha del *nautilus*



- Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. Se le llama también espiral geométrica.
- J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó *spira mirabilis*, rogando que fuera grabada en su tumba.
- La espiral logarítmica vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. El ejemplo más visualmente representativo es la **concha del *nautilus***.

El Partenón



- En la antigua Grecia se utilizó para establecer las proporciones de los templos, tanto en su planta como en sus fachadas. En el Partenón, Fidias también lo aplicó en la composición de las esculturas. (La denominación *Fi* la efectuó en 1900 el matemático Mark Barr en su honor).

Pirámides de Egipto



- Hay un precedente a la cultura griega donde también apareció el número de oro. En **La Gran Pirámide de Keops**, el cociente entre la altura de uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado es 2.

La Última Cena



- Leonardo da Vinci, por ejemplo, la utilizó para definir todas las proporciones fundamentales en su pintura *La última cena*, desde las dimensiones de la mesa, hasta la disposición de Cristo y los discípulos sentados, así como las proporciones de las paredes y ventanas al fondo.

La sección áurea en el pentágrama

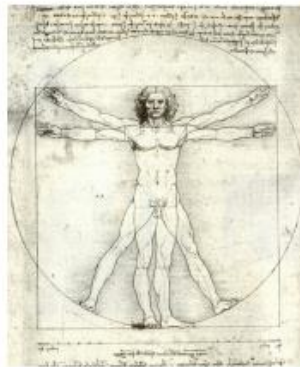


- Existe la relación del número áureo también en el pentagrama o estrella a 5 puntas.

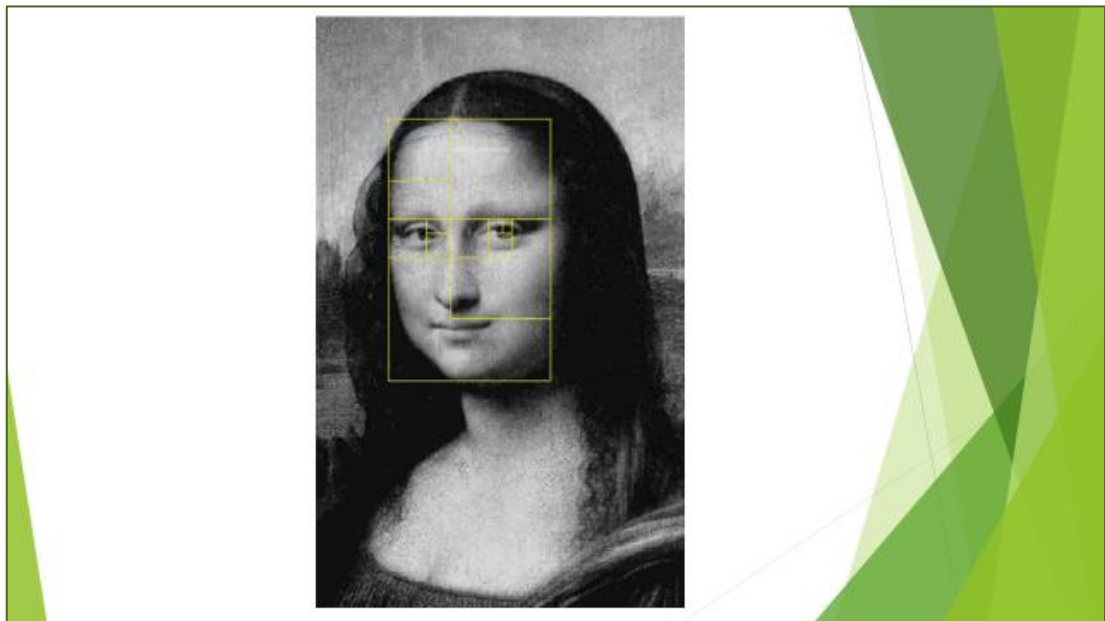
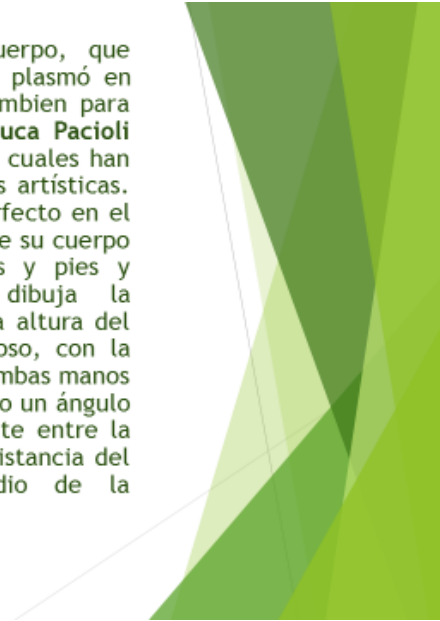
Gráficamente el número áureo es la relación entre el lado del pentágono regular y la recta que une dos vértices no consecutivos de éste.

Hombre de Vitruvio

El pentágono, un símbolo pagano, más tarde acogido por la iglesia católica para representar a la Virgen María, y también por Leonardo da Vinci para asentar en él al hombre de Vitruvio.



- Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron antes los griegos y romanos, las plasmó en este dibujo **Leonardo da Vinci**. Sirvieron también para ilustrar el libro *La Divina Proporción* de **Luca Pacioli** editado en 1509. En dicho libro se describen cuáles han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, **Pacioli** propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90° con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.



ANEXO 02: Planificación de la unidad didáctica

I. DATOS GENERALES:

1.1 UNIDAD DE GESTIÓN EDUCATIVA	: Carlos Fermín Fitzcarrald
1.2 INSTITUCIÓN EDUCATIVA	: N° 86378 “santa rosa” de Uchusquillo
1.3 ÁREA	: Matemática
1.4 GRADO Y SECCIÓN	: 4° Única
1.5 AÑO LECTIVO	: 2016

II. TÍTULO DE LA UNIDAD

“EL VIAJE EN LA HISTORIA DE LOS NÚMEROS”

III. SITUACIÓN SIGNIFICATIVA

Desde los albores de la sociedad humana hasta nuestra actualidad, los números han y siguen vinculados a la vida de cada individuo.

Así a lo largo de los milenios, los números han venido evolucionando junto al hombre, a través de diferentes civilizaciones que surgieron en los distintos puntos del mundo. Cada una de ellas inventó su propio sistema de numeración con el fin de contar y representar cantidades a partir de las necesidades y exigencias de la sociedad.

Los sistemas de numeración más conocidos son: sexagesimal, decimal, quinario y vigesimal. ¿Los incas que instrumento utilizaban para contar?

IV. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIAS	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD.	Matematiza situaciones	• Interpreta el conjunto de los reales como universo numérico
		• Comprende la subdivisión de los reales en los diferentes conjuntos numéricos
		• Comprende el conjunto de los números reales, estableciendo relaciones entre los conjuntos de los racionales e irracionales
		• Reconoce el conjunto de los enteros como extensión del conjunto de los naturales
		• Reconoce los números decimales y su pertenencia al conjunto de los racionales
		• Reconoce los números fraccionarios y su pertenencia al conjunto de los racionales
		• Reconoce los números irracionales y su pertenencia al conjunto de los reales

		• Clasifica los números enteros en primos y compuestos
		• Aproxima números decimales aplicando las propiedades
		• Ordena y compara los números racionales
		• Interpreta la idea de continuidad del conjunto de los reales
		• Reconoce la notación científica como sistema de representación simbólica de números muy grandes y números muy próximos al cero
		• Identifica las características de los decimales exactos y periódicos
		• Interpreta los números racionales como cociente de una fracción
		• Interpreta el significado de los números racionales en diversas situaciones y contextos
		• Interpreta las fracciones como un operador matemático
		• Interpreta el significado de los números irracionales en distintos contextos y situaciones significativas
		• Relaciona la potenciación con sus operaciones inversas: Radicación y logaritmo
	Comunica y representa ideas matemáticas	• Representa los números racionales por medio de fracciones y números decimales
		• Representa simbólicamente los números irracionales
		• Representa los números enteros por medio del producto de sus factores primos
		• Representa gráficamente y simbólicamente intervalos de números reales
		• Representa los números racionales por medio de la notación científica
		• Representa un número racional por medio de su fracción generatriz
	Elabora y usa estrategias	• Usa procesos matemáticos para hallar la descomposición de un número en sus factores primos
		• Usa estrategias para expresar números muy grandes o muy pequeños por medio de la notación científica
		• Calcula la fracción generatriz de un número decimal

		• Utiliza factores primos en la descomposición de un número, mínimo común múltiplo y máximo común divisor para resolver problemas contextualizados
		• Utiliza las propiedades para realizar operaciones entre números racionales
		• Aplica el concepto de los números irracionales para analizar los números de infinitas cifras
		• Aplica propiedades al realizar las operaciones con los números reales
		• Utiliza la propiedad de la potenciación con exponente entero y base entero
		• Calcula el logaritmo de un número utilizando las propiedades
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	• Deduce la necesidad de extender los números naturales a los números enteros para resolver diferentes situaciones problemáticas
		• Analiza datos y procesos matemáticos para hallar la fracción generatriz de un número decimal exacto y de uno periódico
		• Resuelve problemas que impliquen el uso de operaciones con números racionales
		• Identifica y procesa la información al resolver problemas que implican multiplicar o dividir números reales
		• Resuelve operaciones entre logaritmos y determina si sus respuestas son razonables

V. CAMPO TEMÁTICO

- Los naturales y sus propiedades
- Los números enteros y la divisibilidad
- Los números racionales, las fracciones y sus operaciones, los decimales, la fracción generatriz, la notación científica
- Los números irracionales
- Los números reales, densidad y completitud
- Los intervalos reales
- El logaritmo

VI. PRODUCTO MÁS IMPORTANTE

➤

VII. SECUENCIA DE LAS SESIONES	
Sesión 1	2horas pedagógicas
Título: “ <i>evaluación del PRE-TEST</i> ”	
Indicadores:	
Campo temático:	
Conocimientos sobre los números reales.	
Actividades:	
• Para saber el nivel real de comprensión de los números Reales, se realiza el examen pre-test. • Los estudiantes individualmente desarrollan el examen. • Finalmente los estudiantes deben indagar sobre el conjunto numérico de los reales.	
Sesión 2	2horas pedagógicas
Título: “ <i>Contamos como los antiguos</i> ”	
Indicadores:	
• Reconoce el conjunto de los enteros como extensión del conjunto de los naturales • Comprende la subdivisión de los reales en los diferentes conjuntos numéricos • Clasifica los números enteros en primos y compuestos. • Representa los números enteros por medio del producto de sus factores primos • Usa procesos matemáticos para hallar la descomposición de un número en sus factores primos. • Utiliza factores primos en la descomposición de un número, mínimo común múltiplo y máximo común divisor para resolver problemas contextualizados. • Identifica los números enteros como una extensión del conjunto de los números naturales. • Deduce la necesidad de extender los números naturales a los números enteros para resolver diferentes situaciones problemáticas.	
Campo temático:	
Los números naturales, los números enteros, múltiplos y divisores, descomposición en factores primos.	
Actividades:	
• El docente presenta por medio de diapositivas una reseña de los principales sistemas de numeración utilizados a lo largo de la historia, sus características peculiares, las características comunes, las innovaciones aportadas y sus limitaciones. • Los estudiantes realizan la actividad “<i>Contamos como los antiguos</i>” utilizando las informaciones recibidas en la reseña histórica. • Al finalizar, los estudiantes reconocen el conjunto de símbolos y reglas de escritura utilizados para contar en cada sistema de numeración explorado, leen y escriben números con estos sistemas de numeración	
Sesión 3	2 horas pedagógicas
Título: “ <i>La fracción egipcia</i> ”	
Indicadores:	
• Deduce la necesidad de extender los números enteros a los números racionales para resolver diferentes situaciones problemáticas • Reconoce los números decimales y su pertenencia al conjunto de los racionales • Ordena y compara los números racionales • Reconoce los números fraccionarios y su pertenencia al conjunto de los racionales • Interpreta el significado de los números racionales en diversas situaciones y contextos • Interpreta las fracciones como un operador matemático • Compara y establece relaciones de orden entre los elementos del conjunto de los racionales	

• Resuelve operaciones matemáticas utilizando fracciones • Resuelve problemas que implican el uso de números racionales Campo temático: Los números racionales: fracciones. Actividades: • El docente presenta a los estudiantes una reseña histórica sobre el conjunto de los números racionales desarrollado en las diferentes civilizaciones, durante la cual, los estudiantes subrayan las partes más resaltantes del texto, identificando algunas características peculiares de cada sistema y relacionándolas a nuestro sistema actual • los estudiantes, desarrollan la actividad “<i>Fracciones egipcias</i>”, codificando los números racionales con el sistema egipcio, manifestando sus ventajas y desventajas para llegar a explorar las características, definición, términos, de las fracciones relacionándolas en el sistema actual	
Sesión 4	2 horas pedagógicas
Título: “ <i>Los números racionales</i> ”	
Indicadores: • Aproxima números decimales aplicando las propiedades • Identifica las características de los decimales exactos y periódicos • Interpreta los números racionales como cociente de una fracción • Representa los números racionales por medio de fracciones y números decimales • Representa un número racional por medio de su fracción generatriz • Calcula la fracción generatriz de un número decimal • Analiza y sintetiza los procesos para resolver problemas con números decimales • Analiza datos y procesos matemáticos para hallar la fracción generatriz de un número decimal exacto y de uno periódico Campo temático: Los números racionales: decimales y fracción generatriz Actividades: • El docente recuerda los contenidos desarrollados en la clase anterior a través de algunos ejercicios • Para finalizar, se hace un debate de los contenidos desarrollados y los estudiantes emiten sus conclusiones	
Sesión 5	2 horas pedagógicas
Título: “ <i>Necesito más números</i> ”	
Indicadores: • Reconoce los números irracionales y su pertenencia al conjunto de los reales • Interpreta el significado de los números irracionales en distintos contextos y situaciones significativas • Representa simbólicamente los números irracionales • Aplica el concepto de los números irracionales para analizar los números de infinitas cifras • Plantea conjeturas basado en la experimentación, para reconocer números irracionales en la recta numérica • Generaliza que todo número irracional es un decimal infinito no periódico Campo temático: Los números irracionales Actividades: • El docente presenta a los estudiantes una reseña histórica sobre la necesidad de extender el conjunto de los números racionales para responder a las nuevas exigencia de la sociedad humana	

- Los estudiantes analizan la actividad, “Necesito más números” a partir del análisis, los estudiantes desarrollan la actividad con la ayuda de la calculadora - Se contestan por escrito algunas preguntas sobre los números racionales e irracionales	
Sesión 6	2 horas pedagógicas
Título: “¿Uno de ellos, uno de nosotros?”	
Indicadores: - Interpreta el conjunto de los reales como universo numérico - Aplica propiedades al realizar las operaciones con los números reales - Identifica y procesa la información al resolver problemas que implican multiplicar o dividir números reales Campo temático: El conjunto de los reales, la recta real, densidad y continuidad Actividades: - El docente presenta por medio de diapositivas una reseña del número áureo utilizados a lo largo de la historia, sus características peculiares, las características comunes y la proporción que existe en la relación de la naturaleza, el arte y el hombre - Los estudiantes analizan las informaciones recibidas en la reseña histórica, desarrollando la actividad “¿Uno de ellos o uno de nosotros?” - Al finalizar los estudiantes interpretan el conjunto de los reales como universo numérico, analizando las diferentes características del número dorado	
Sesión 7	2 horas pedagógicas
Título: “Los intervalos”	
Indicadores: - Interpreta la idea de continuidad del conjunto de los reales - Representa gráficamente y simbólicamente intervalos de números reales Campo temático: Números reales: intervalos Actividades: - El docente cuenta la reseña histórica de los números reales. Luego forma equipos de trabajo y presenta la siguiente actividad lúdica: “Jugando con nuestras tallas” - Partiendo de esta actividad el profesor explica la formación de intervalos y la continuidad de los números reales	
Sesión 8	2 horas pedagógicas
Título: “Dimensiones y distancias en el universo”	
Indicadores: - Reconoce la notación científica como sistema de representación simbólica de números muy grandes y números muy próximos al cero - Representa los números racionales por medio de la notación científica - Usa estrategias para expresar números muy grandes o muy pequeños por medio de la notación científica Campo temático: La notación científica Actividades: - El docente expone la necesidad de poder expresar de forma simplificada números que representen medidas extremadamente grandes y extremadamente pequeñas, apoyándose de un texto titulado: “dimensiones y distancias en el universo” - Los estudiantes analizan detalladamente la lectura examinando las características de los números decimales expresando y evaluando las longitudes del meridiano - Continuando con la actividad, los estudiantes analizan las longitudes de GREENWICH y la longitud del radio ecuatorial de la Tierra en los diferentes sistemas de medida, redondeando y expresando en notación científica	

Sesión 9	2 horas pedagógicas
Título: “Logaritmo”	
Indicadores: • Relaciona la potenciación con sus operaciones inversas: radicación y logaritmo • Utiliza la propiedad de la potenciación con exponente entero y base entero • Calcula el logaritmo de un número utilizando las propiedades • Resuelve operaciones entre logaritmos y determina si sus respuestas son razonables Campo temático: Potencias, raíces y logaritmos Actividades: • El profesor presenta una pequeña historia sobre los logaritmos • Continuando con la reseña , el docente presenta la siguiente actividad: “La tabla de Napier” • Para consolidar el tema, se desarrolla los ejercicios y problemas	
Sesión 10	2 horas pedagógicas
Título: “Evaluación del POST-TEST”	
Indicadores: • Campo temático: Conocimientos sobre los números reales Actividades: • Para comprobar si los contenidos desarrollados ha sido significativo, se realiza el mismo examen que se desarrolló al empezar la unidad (post-test) • El docente da algunas indicaciones antes de entregar el examen • Los estudiantes individualmente desarrollan el examen • Junto a los estudiantes se desarrollan algunos ejercicios del examen	

VIII. EVALUACIÓN			
SITUACIÓN DE EVALUACIÓN	COMPETENCIAS	CAPACIDADES	INDICADORES
Comprende el conjunto de los números reales, estableciendo relaciones entre los conjuntos de los racionales e irracionales. - Resuelven problemas mediante el uso de números reales.	ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD	Matematiza situaciones	• Reconoce los números fraccionarios y su pertenencia al conjunto de los racionales • Reconoce los números irracionales y su pertenencia al conjunto de los reales • Clasifica los números enteros en primos y compuestos • Aproxima números decimales aplicando las propiedades • Ordena y compara los números racionales • Interpreta la idea de continuidad del conjunto de los reales • Reconoce la notación científica como sistema de representación simbólica de números muy grandes y números muy próximos al cero • Identifica las características de los decimales exactos y periódicos • Interpreta los números racionales como cociente de una fracción • Interpreta el significado de los números racionales

			en diversas situaciones y contextos • Interpreta las fracciones como un operador matemático • Interpreta el significado de los números irracionales en distintos contextos y situaciones significativas • Relaciona la potenciación con sus operaciones inversas: Radicación y logaritmo
		Comunica y representa ideas matemáticas	• Representa los números racionales por medio de fracciones y números decimales • Representa simbólicamente los números irracionales • Representa los números enteros por medio del producto de sus factores primos • Representa gráficamente y simbólicamente intervalos de números reales • Representa los números racionales por medio de la notación científica • Representa un número racional por medio de su fracción generatriz
		Elabora y usa estrategias	• Usa procesos matemáticos para hallar la descomposición de

			un número en sus factores primos • Usa estrategias para expresar números muy grandes o muy pequeños por medio de la notación científica • Utiliza factores primos en la descomposición de un número, mínimo común múltiplo y máximo común divisor para resolver problemas contextualizados • Utiliza las propiedades para realizar operaciones entre números racionales • Aplica el concepto de los números irracionales para analizar los números de infinitas cifras • Aplica propiedades al realizar las operaciones con los números reales • Utiliza la propiedad de la potenciación con exponente entero y base entero • Calcula el logaritmo de un número utilizando las propiedades
		Razona y argumenta generando ideas matemáticas	• Deduce la necesidad de extender los números naturales a los números enteros para resolver diferentes situaciones problemáticas • Analiza datos y

			procesos matemáticos para hallar la fracción generatriz de un número decimal exacto y de uno periódico • Resuelve problemas que impliquen el uso de operaciones con números racionales • Identifica y procesa la información al resolver problemas que implican multiplicar o dividir números reales • Resuelve operaciones entre logaritmos y determina si sus respuestas son razonables
--	--	--	--

IX. MATERIALES BÁSICOS QUE SE USAN EN LA UNIDAD	
-	Ministerio de Educación. Texto escolar Matemática 1 (2012) Lima: Editorial Norma S.A.C.
-	Ministerio de Educación. Fascículo Rutas del Aprendizaje de Matemática ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? del VII ciclo (2015) Lima: Corporación Gráfica Navarrete.
-	Ministerio de Educación. Módulo de Resolución de Problemas Resolvamos 1 (2012) Lima: Editorial El Comercio S.A.
-	Ministerio de Educación. Libro de matemática 4º grado de Educación Secundaria. 2012. Grupo Editorial Santillana.
-	Ministerio de Educación. HERRAMIENTAS PEDAGÓGICAS DE PLANIFICACIÓN CURRICULAR PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ÁMBITOS RURALES, ÁREA DE MATEMÁTICA; (2016).
-	Libro de matemática 4º grado de Educación Secundaria. 2012. Grupo Editorial Santillana.
-	Libro de matemática 2º grado de Educación Secundaria. 2012. Grupo Editorial Santillana.
-	Libro de matemática 3º grado de Educación Secundaria. 2012. Grupo Editorial Santillana.
-	Libro de matemática 4º grado de Educación Secundaria. 2012. Grupo Editorial S.M.
-	Libro de matemática 4º grado de Educación Secundaria. 2009. Grupo Editorial Manuel CoveñasNaquiche.
-	Libro de matemática 3º de educación secundaria. Editorial EDELVIVES.
-	Ministerio de educación. Fascículo 1: Número y numerales (2007). Editorial: El Nosedal S.A.C

- Libro de matemática 1° de secundaria. grupo editorial SC; Madrid.
- fichas, láminas, equipo de multimedia, etc.
- Plumones, cartulinas, papelógrafos, cinta *masking tape*, pizarra, tizas, etc.

ANEXO 3: Sesiones de clases

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 01/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“EXAMEN DE PRE-TEST”

II. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (05 minutos)

- El docente presenta la unidad a los estudiantes precisando el título, los aprendizajes que deben lograr y las estrategias que van a emplear.
- Para saber el nivel real de comprensión de los números reales, se realiza un examen.

Desarrollo: (70 minutos)

- Los estudiantes individualmente desarrollan el examen.

Examen de pre-test

“Viaje en la Historia de los números”

APELLIDOS Y NOMBRES:.....

GRADO Y SECCIÓN:.....FECHA:.....

- 1) Marca con una $\checkmark$ el conjunto o los conjuntos al que pertenece cada número.

Número Conjuntos	-16	3/	$\sqrt{12}$	0,24	$2,1\hat{6}$	45/15	$\sqrt{3}+1$	$\sqrt{64}$
N								
Z								
Q								
I								

- 2) Descompón en producto de factores primos los siguientes números:
120; -35; 42; 345; 163; 1386.

- 3) Representa gráficamente cada intervalo dado de manera simbólica.

Representación simbólica	Representación gráfica
$[-1; 4]$	
$] -\infty; 2]$	
$[3 [$	

$]-2, ; 8]$	
$]3/5; 2[$	

4) Expresa en notación científica.

- a) 0,0000000007005
- b) 700000
- c) 0,00000000921
- d) 15000000000
- e) 394800000
- f) 0,00004009
- g) 0,0000000051

5) Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

- a) 3,49
- b) $0,\overline{12}$
- c) 0,072
- d) $2,\overline{54}$

6) Resuelve los siguientes problemas con números racionales:

3/5 de los estudiantes de 4° A tienen hermanos en la misma institución educativa; 5/6 los tienen en primaria y los 3 restantes, en secundaria. ¿Cuántos estudiantes hay en 4° A?

Andrés desea empacar 160 tornillos, 150 tuercas y 120 arandelas en cajas con igual cantidad de unidades de cada clase. ¿Cuál es la máxima cantidad de unidades que puede contener cada una? ¿Cuántas cajas se requieren?

Luz trabaja en una empresa donde le pagan S/. 1275 de sueldo en 30 días de trabajo. Luego de 23 días de trabajo se ve obligada a renunciar y la empresa le paga S/. 885, y le entrega una bolsa de víveres. Si Luz quedó conforme, ¿en cuánto valorizó la bolsa de víveres?

7) Resuelve el siguiente problema:

Sandra heredó un terreno rectangular de $10\sqrt{2}m$ de largo y $6\sqrt{2}m$ de ancho. Si proyecta cercarlo con paredes de ladrillo, ¿Cuántos metros de pared construirá?

8) Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_4 64$

b) $\log_3 81 + \log_2 64$

c) $\log_7 343 - \log_8 512 + \log_4 256 - \log_3 729$

CIERRE (15 min)

- El docente recoge la ficha de la evaluación
- Se desarrollan algunos ejercicios del examen

III. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Indagar sobre el conjunto numérico de los reales

IV. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ 4 matemáticas (Santillana); Ministerio de Educación
- ❖ Proyecto Encuentros-Matemática 4, s.m
- ❖ Plumones

ANEXO 4: SESIONES DE APRENDIZAJES

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 02/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“CONTAMOS COMO LOS ANTIGUOS”

II. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD	Matematiza situaciones	- Reconoce el conjunto de los enteros como extensión del conjunto de los naturales - Comprende la subdivisión de los reales en los diferentes conjuntos numéricos - Clasifica los números enteros en primos y compuestos
	Comunica y representa ideas matemáticas	Representa los números enteros por medio del producto de sus factores primos
	Elabora y usa estrategias	- Usa procesos matemáticos para hallar la descomposición de un número en sus factores primos - Utiliza factores primos en la descomposición de un número, mínimo común múltiplo y máximo común divisor para resolver problemas contextualizados
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas.	- Identifica los números enteros como una extensión del conjunto de los números naturales - Deduce la necesidad de extender los números naturales a los números enteros para resolver diferentes situaciones problemáticas

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (15 minutos)

- El docente llega al aula a la hora correspondiente demostrando puntualidad y responsabilidad saludando cordialmente a los estudiantes
- El docente presenta, a través de diapositivas la historia de los números a lo largo de la historia de la humanidad

Contamos como los antiguos

RESEÑA HISTÓRICA SOBRE LA IDEA DE NÚMERO

Desarrollo: (65 minutos)

El docente organiza en grupos de 4 estudiantes para realizar la actividad 1. Los estudiantes exploran las diferentes características de los sistemas numéricos a través de la actividad.

El docente presenta el propósito de la clase que es explorar el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros.

LOS NÚMEROS NATURALES (N)

El conjunto de los números naturales es el conjunto de todos los números enteros no negativos.

El conjunto de los naturales tiene un número mínimo, un primer elemento del conjunto, que es el cero; es pero un conjunto infinito y no tiene un número máximo, ya que todo número natural tiene uno siguiente. Por tal motivo, por grande que sea un número natural, siempre es posible encontrar otro mayor, agregándole una unidad. Así los números naturales crecen hasta el $(+\infty)$ más infinito. A este conjunto se le representa por la letra N.

$N = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

Gráficamente, el conjunto de los números naturales se representa sobre una semirrecta en la que el punto de origen es el cero



Operaciones en N

ADICIÓN EN LOS NÚMEROS NATURALES (N)

La adición es la operación que a un par ordenado de números naturales. Llamados sumandos, le hace corresponder un tercer número natural que es único, y al que se da nombre de suma.

Propiedades de la adición de los números naturales (N)

PROPIEDAD DE CLAUSURA	PROPIEDAD CONMUTATIVA	PROPIEDAD ASOCIATIVA	PROPIEDAD DEL ELEMENTO NEUTRO
La suma de dos o más números naturales siempre es un número natural.	Cambiando el orden de los adendos la suma no cambia.	La forma de agrupar los sumandos no altera la suma. $a + (b + c) = (a + b) + c$	La suma de cualquier número natural "n" con el cero, siempre es el mismo número.

$a+b=c$ $a, b \text{ y } c \text{ pertenece } \mathbb{N}$	$a+b=b+a$	c	$n+0=n$
--	-----------	-----	---------

SUSTRACCIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES (N)

Es una operación en la que dados dos números naturales “m” y “n” tal que $m \geq n$, los llamamos respectivamente minuendo (M) y sustraendo (s); se obtiene un número “d” que también es número natural, tal que aumentando a “d” el valor de “n”, obtenemos “m”

$$m - n = d \leftrightarrow d + n = m$$

Propiedades de la sustracción

PROPIEDAD INVARIANTIVA	PROPIEDAD DEL ELEMENTO NEUTRO
Al restar o sumar una misma cantidad del minuendo y del sustraendo el resultado no cambia. $(a+c) - (b+c) = a-b$ $(a-c) - (b-c) = a-b$	Al restar un número natural con el cero (0) no varía el minuendo; es decir no modifica la situación inicial. $M - 0 = m$

PRODUCTO DE LOS NÚMEROS NATURALES (N)

Es una operación de una suma sucesiva de un mismo número:

$$a \times b = \underbrace{b + b + b + \dots + b}_a$$

“a” veces

Ejemplo:

$$5 \times 4 = \underbrace{5 + 5 + 5 + 5}_{4 \text{ veces}}$$

4 veces

DIVISION DE LOS NÚMEROS NATURALES (N)

Dividir es calcular el número de veces que contiene un número llamado dividendo (D) a otro llamado divisor (d). Este número de veces recibe el nombre de cociente (q). Además D, d y q $\in \mathbb{N}$.

RADICACIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES

La radicación es una operación inversa a la potenciación mediante la cual es posible calcular la base si se conoce la potencia y el exponente.

Insuficiencia del conjunto (N)

¿Por qué es necesario un conjunto más amplio que N?

Porque en el conjunto N no siempre es posible la operación de la sustracción.

Así por ejemplo:

$$15 - 3 = 12 \text{ porque } 3 + 12 = 15$$

$$25 - 20 = 5 \text{ porque } 20 + 5 = 25, \text{ pero}$$

$$10 - 18 = ? \quad 18 + \square = 10$$

Es decir en este último ejemplo no existe en el conjunto de los números naturales (N) un número que sumado con 18 dé como resultado 10 ¿verdad?

Porque en el conjunto de los números naturales la sustracción es posible solamente si el minuendo es mayor o igual que el sustraendo.

Sin embargo, hay muchas situaciones prácticas en las que se presentan sustracciones en las cuales el minuendo es menor que el sustraendo, como hemos visto en el ejemplo anterior.

Ante esta dificultad, se hace necesario ampliar el conjunto de los números naturales o (N), a otro llamado CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

LOS NÚMEROS ENTEROS (Z)

Los números enteros (Z) están formados por el 0, los números positivos y los números negativos. Los números enteros forman un conjunto infinito.

$$Z = \{ \dots -5; -4; -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; +4; +5 \dots \}$$

REPRESENTACIÓN DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS (Z), EN LA RECTA NUMÉRICA

Sobre una línea recta, ubiquemos un punto de referencia al que le hacemos corresponder el número CERO.

A partir del CERO, empleando una unidad de medida, (puede ser 1 cm), ubicamos 1 punto hacia la derecha y hacia la izquierda, haciendo corresponder a cada uno de los números positivos y los números enteros negativos, respectivamente, así:



Operaciones en (Z)

LA ADICIÓN EN (Z)

Es la operación binaria que, dados dos enteros “a” y “b” llamados sumandos, hace corresponder un tercer entero “s” llamado suma. $S = a + b$

REGLA DE SIGNOS EN LA ADICIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Si se trata de números enteros del mismo signo sumamos los valores absolutos y el signo del resultado es el mismo de los sumandos.

Ejemplos:

$$(-12) + (-3) = -15$$

SUSTRACCIÓN EN (Z)

Es la operación inversa a la adición, que consiste en que, dados dos números llamados minuendo y sustraendo, buscamos un tercer número llamado diferencia que adicionado al sustraendo nos resulta el minuendo. $M - S = D$

Ejemplo:

$$(-7) - (-2) = -5$$

→ Diferencia
→ Sustraendo
→ Minuendo

LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

La multiplicación de dos números enteros es la operación que consiste en, dados dos números llamados multiplicando y multiplicador, hallar un tercer número llamado producto, que sea con respecto al multiplicando (tanto en valor absoluto como en signo) lo que el multiplicador es respecto a la unidad positiva. $a \times b = p$

DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

La división es la operación inversa a la multiplicación, que permite saber cuántas veces (cociente) un entero llamado dividendo contiene a otro entero llamado divisor. Luego, al resultado se le agrega el signo (+), si ambos números son de igual signo, o el signo (-), si son de signos diferentes.

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

La potencia de un número entero “a” elevado a la “n” es otro número que resulta de multiplicar “a” tantas veces como indica “n”.

El exponente natural “n” indica la cantidad de veces que se repite la base entera “a” como factor.

$$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ veces}} = a^n$$

Donde “a” es la base y “n” es el exponente

MÚLTIPLOS Y DIVISORES. DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES PRIMOS

Todo número entero se descompone de modo único, salvo el signo y el orden de los factores, en producto de números primos.

Ejemplo:

Vamos a descomponer los números enteros 42, 50 y -180 en producto de factores primos.

$$42 = 2 \times 21 = 2 \times 3 \times 7$$

$$50 = 2 \times 25 = 2 \times 5^2$$

$$-180 = -18 \times 10 = -2 \times 9 \times 2 \times 5 = -2^2 \times 3^2 \times 5$$

EJERCICIOS:

Roxana vendió un televisor en s/.430; perdiendo s/.80. ¿Cuánto le costó a ella el televisor?

Halla la suma de tres números, sabiendo que el primero es 25, el segundo es mayor que este en 10 unidades y el tercero es mayor en 8 unidades que el segundo.

El menor de cuatro hermanos tiene 21 años y cada uno le lleva dos años al siguiente. ¿Cuál es la suma de las edades?

Luis ganó s/.1350, su hermano Fernando ganó s/.250 más que él y Pedro ganó tanto como los dos primeros, más s/.600. ¿Cuánto ganó Pedro?

Si recibiera s/.372; podría comprar un televisor que cuesta s/.685, ¿cuánto tengo?

Tenía s/.2225, presté s/.580, pagué una deuda y me quedó s/.912, ¿cuánto debía?

CIERRE (10 min)

- Los estudiantes desarrollan la siguiente actividad.
- a) Escribe con signos egipcios los siguientes números: 64, 251, 3644.

IV. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Realizar un cuadro comparativo para los diferentes sistemas de numeración, resaltando las principales características, las novedades introducidas, las ventajas y los defectos.

	Principales características	Innovaciones aportadas	Principales ventajas	Principales defectos
SISTEMA DE NUMERACIÓN ..				

V. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ Multimedia
- ❖ Fichas de trabajo
- ❖ Plumones

CONTAMOS COMO LOS ANTIGUOS

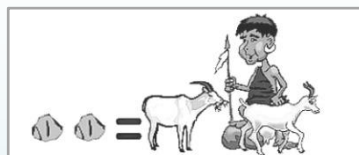
Reseña histórica del concepto de número y de los sistemas de numeración

Los números en la historia, aparecen involuntariamente junto al hombre a través de un proceso evolutivo muy lento que desde siempre ha acompañado la vida del hombre y sus necesidades.

Desde su aparición en la Tierra, el hombre tuvo la necesidad de contar y representar las actividades más importantes que realizaba durante el día. Por esta razón, el hombre empezó a identificar, distinguir y representar las cosas que lo rodeaban a través de marcas en huesos, trozos de madera o montoncitos de piedra, etc., para mantener la información. Con estas representaciones simbólicas, el hombre dio un gran salto porque fue el primer

¿QUÉ ES CALCULAR?

Veamos a un pastor de cabras primitivo:



En una tribu primitiva, para “contar” el rebaño de ovejas se procedía así: por cada oveja que salía de la cueva ponían una piedra en un montón; para comprobar que a la vuelta estaban todas, iban quitando una piedra por cada oveja que entraba. Si al final no quedaba piedra alguna, estaban todas. En otro caso, sabían las unidades por separado de ovejas que faltaban, aunque todavía no sabían expresar el número de ovejas ni cuántas faltaban.

Este mismo sistema, lo vinieron usando los pastores romanos de los primeros tiempos. Como todos sabemos, los romanos hablaban en latín y, en ese idioma, piedra se dice **calculus**, de donde viene la palabra **cálculo**. Por eso, calcular significa contar con piedras. Hoy en día ya no se “calcula con piedras”, sino con números.

Con el pasar del tiempo, el hombre se dio cuenta de las igualdades y semejanzas que había en ciertos elementos que lo rodeaban y así concibió la idea de la unidad. De esta forma fueron percatándose la relación existente entre pares de objetos relacionados: las manos y los pies, el hombre y la mujer, el día y la noche, la vida y la muerte..., proceso que culminó con el concepto de “par” y “dos”.

En un principio, el hombre para contar objetos se apoyó de su propia naturaleza, por ejemplo: utilizó los dedos de la mano para representar conjuntos de hasta 5 o 10 elementos, luego como esto era insuficiente recurrió a otros medios como los montoncitos de piedritas, palitos y todo objeto a su alcance. Pronto se presentó un nuevo problema para el hombre: ¿cómo poder llevar registro de las cantidades? Las manos, los montoncitos de piedras u otros objetos no podían llevar memoria a largo plazo, así el hombre tuvo que encontrar una manera simbólica de representar las cantidades que iba contando y registrarlas de manera permanente. Los primeros registros contables los encontramos en las pinturas rupestres. Esto impulsó el nacimiento y el desarrollo de los sistemas numéricos.

Así cada civilización, a lo largo de la historia de la humanidad, empleó una forma particular de representar los números, creando sus propios sistemas de numeración; hasta llegar a prevalecer el sistema inventado por los hindúes, que consistía en los dígitos del 1 al 9 y otro para el cero, siendo un sistema de numeración posicional en base 10, tal cual los conocemos en la actualidad.

LA EVOLUCIÓN DE LA ESCRITURA DE LOS NÚMEROS:

Al pasar los siglos cada civilización inventó su propio sistema de numeración, cuando apareció la necesidad de expresarla de algún modo, y sobre todo, de mantener en el tiempo los resultados de operaciones fáciles de recordar por transmisión oral, llegado así a cierto punto al desarrollo de la conciencia global de “número”. Es así que cada civilización de una u otra manera representó los números a través de símbolos más familiares a ellos para mantener la información y cuantificar los elementos que poseían.

Los sumerios

La primera escritura numérica se le atribuye a los sumerios aproximadamente a finales del **IV milenio**; una civilización ubicada en la baja Mesopotamia, entre las cuencas de los ríos Tigris y Éufrates.

Los sumerios para representar los números utilizaron tablillas de arcilla, que eran el papel de la época. Esas tablillas se utilizaban para realizar anotaciones de cantidades asociadas a diversas clases de mercancías, siendo las primeras actas contables que se conocen.

Los sumerios contaban utilizando la base 60 (sistema sexagesimal) en lugar de la base quinaria o decimal. Todavía quedan restos de esa base, por ejemplo en la forma de medir un ángulo o en la medida del tiempo.

La utilización de la base 60 implicaba el conocimiento de 60 signos y palabras distintas para nombrar a los números del 1 al 60 (todavía no se conocía el cero). Esto se resolvía usando el 10 como unidad auxiliar. Así, se tenían diez palabras para los números del 1 al 10. El sistema da nombre a los múltiplos de 10 hasta el 60 incluido (Remedios Macías, 2009).

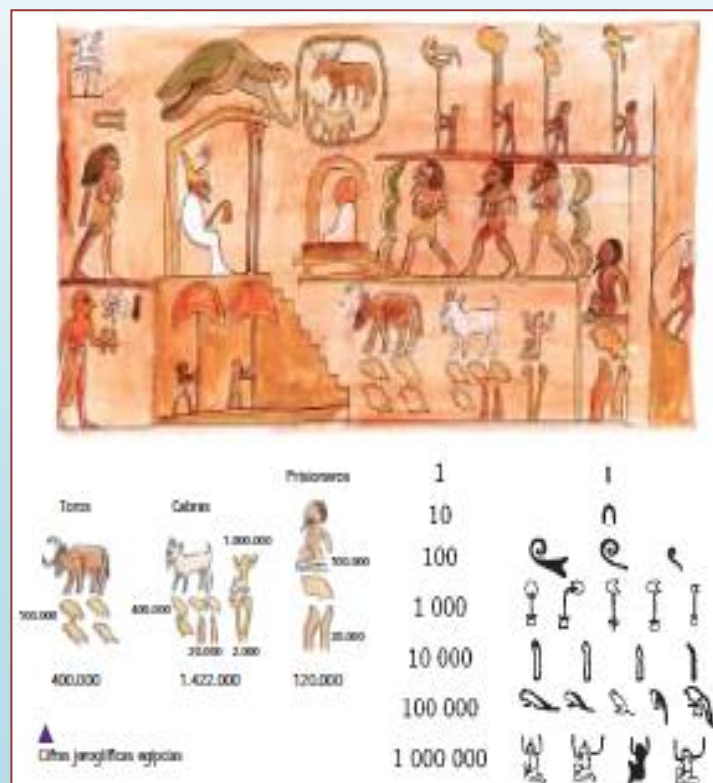
┐	┐┐	┐┐┐	┐┐┐┐	┐┐┐┐┐
1	2	3	4	5
┐┐┐	┐┐┐┐	┐┐┐┐┐	┐┐┐┐┐┐	◁
6	7	8	9	10
◁┐	◁┐┐	◁┐┐┐	◁┐┐┐┐	◁┐┐┐┐┐
11	12	13	14	15
◁◁	◁◁◁	◁┐	◁┐┐	┐
20	30	40	50	60

Los egipcios

El sistema de numeración egipcio nace aproximadamente alrededor del año 3000 a.C.

Este sistema utilizado por ellos fue un sistema decimal aditivo que consistía en escribir los números por alineación o acumulación de objetos (piedras, conchas, guijarros, etc.) asociados cada uno de ellos al orden de la unidad utilizada a través de la escritura jeroglífica. El “palo” representaba la unidad; el “arco” la decena; el “lazo” la centena; etc. (Remedios Macías, 2009).

Esta civilización alcanzó grandes pasos en el mundo de los números, ya que dieron el uso de los números naturales hasta llegar a las fracciones en las proporciones de la construcción de las famosas pirámides. Aquí se encuentran los primeros textos matemáticos de los que hay constancia, quizás uno de los más antiguos y más importantes sea el Papiro Rhind de Egipto, escrito hacia el 1650 a.C. y que viene a ser la mayor fuente de conocimiento de la matemática egipcia.



Los chinos

La civilización china al igual que los demás pueblos, inventó su propio sistema de numeración hacia el año 1500 a. c., éste consistía en un sistema híbrido, que combinaba el principio aditivo con el multiplicativo en base diez, y se debía tener en cuenta el orden de escritura, ya fuera vertical (abajo hacia arriba) u horizontal (de izquierda a derecha). Empleaba una serie de trece ideogramas hasta la decena, centena, millar y decena de millar, utilizando combinaciones entre si hasta obtener la cifra deseada; en la figura se muestran los ideogramas (Remedios Macías, 2009).

Los chinos tenían una vasta cultura sobre las fracciones, y eran capaces de obtener el mínimo común denominador. Llamaban hijo al numerador y madre al denominador, pero tenían preferencia por su escritura decimal.

A esta civilización se le atribuye el utilizzo de los números negativos; los representaban a través de una varilla de color rojo, porque la de color negro era para los números positivos; estos fueron los primeros instrumentos que aparecieron en la historia, no sólo por la necesidad de representar números cada vez mayores, sino por la rapidez y la exactitud que se necesitaban en el cálculo, significaron factores importantes en las operaciones comerciales.

一 1	六 6	
二 2	七 7	百 100
三 3	八 8	千 1000
四 4	九 9	萬 10000
五 5	十 10	

Los griegos

La civilización griega, se desarrolló aproximadamente hacia el año 600 a.c. Y utilizaron dos sistemas de numeración: ática y jónica.

1) *La numeración Ática*

En esta época, los griegos aprendieron a representar o tener el conocimiento de número gracias a la influencia cultural de los egipcios y de los fenicios; su sistema de numeración se basaba en un método de carácter aditivo en base diez. Para representar la unidad y los números hasta el 4, empleaban trazos verticales repetitivos; para el 5, 10 y 1000, su representación era la letra correspondiente a la inicial de cada cifra, 5 (pente), 10 (deka), 1000 (khiloi). Los símbolos de 50, 500, 5000, los obtenían por el principio multiplicativo, añadiendo el signo de 10, 100, 1000, al de 5, como se observa en la figura (Remedios Macías, 2009).

Ι	Γ	Δ	Γ ^Δ	Η
1	5	10	50	100
Γ ^Η	Χ	Γ ^Χ	Μ	
500	1000	5000	10000	

2) *La numeración jónica o alfabética*

En este segundo periodo, el sistema de numeración utilizado por los griegos era un sistema aditivo, pero con un esquema más complicado, porque emplearon las 24 letras del alfabeto griego, más otros tres símbolos fuera de uso. Además, cuando escribían algunas cifras numéricas los números parecían palabras y las palabras tenían un valor numérico. Este sistema literal era muy poco flexible porque era difícil hacer operaciones aritméticas, razón por la cual no tuvieron una adecuada manera de representar los números, y les impidió hacer mayores progresos en el cálculo matemático.

Sin embargo fueron los griegos quienes realizaron las aportaciones más valiosas en el desarrollo del concepto de número, por ejemplo utilizaron las fracciones; la escuela pitagórica dio un gran aporte al descubrir los números inconmensurables que hoy se conocen como números irracionales (Remedios Macías, 2009).

α	β	γ	δ	ϵ	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	$\omicron$	π	ρ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ϱ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	Υ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Los mayas

Uno de los sistemas de numeración más admirables de toda la antigüedad es, sin duda, el de los Mayas que se desarrolló en América central, alrededor de los años 400 – 300 a.C.; los Mayan practicaban el comercio, la agricultura y la astronomía; gracias a estas actividades que realizaban tenían un amplio conocimiento sobre los números y su uso. Su sistema de numeración era de base veinte, y utiliza solo tres símbolos muy sencillos para representar todos los números; estos son: el punto, la raya y la representación del cero (Remedios Macías, 2009).

El sistema de numeración que utilizaban los mayas fue muy similar a nuestro sistema de numeración porque era posicional, escribían de arriba hacia abajo y además inventaron el cero a pesar de no tener ningún contacto cultural con otras civilizaciones.

1	2	3	4	5
•	• •	• • •	• • • •	—
6	7	8	9	10
• —	• • —	• • • —	• • • • —	— —
11	12	13	14	15
• — —	• • — —	• • • — —	• • • • — —	— — —
16	17	18	19	20
• — — —	• • — — —	• • • — — —	• • • • — — —	• — ○

1.1.1. Los romanos

El sistema de numeración romano proviene de los etruscos, este sistema se desarrolló aproximadamente hace unos 2.000 años, fue de uso común en Europa hasta fines de la Edad Media. Los romanos usaron el alfabeto latino para los símbolos de sus números. El sistema romano es quinario, además, es esencialmente aditivo, en el que un número designado por un conjunto de símbolos es sencillamente la suma de los números representados por cada uno de los símbolos en el conjunto.

Con el pasar del tiempo, complicaron la escritura de los números introduciendo algunas reglas, estas son:

1. Si el número está conformado por dos símbolos diferentes, se debe tener en cuenta la ubicación, si el número menor está a la derecha del mayor, entonces se adicionará a éste y si está a la izquierda se le restará.

- $LV = X + V = 50 + 5 = 55$
- $IX = X - I = 10 - 1 = 9$

2. Un símbolo primario (I, X, C y M) no debe repetirse más de tres veces en la escritura de una misma cantidad y los símbolos secundarios (V, L y D) deben escribirse sólo una vez y no se anteponen.

- $CCC = 300$
- $CD = 400$

3. Una raya escrita encima de un símbolo, significa que éste ha sido multiplicado por 1.000; dos rayas significa que ha sido multiplicado por 1.000.000; por lo tanto, para cantidades mayores que 3.999; es decir, MMMCMXCIX, se escriben símbolos que representen números menores que éste y se le colocan las rayas necesarias.

- $\overline{IV} = 4 \times 1000 = 4000$
- $\overline{\overline{VII}} = 7 \times 1\,000\,000 = 7\,000\,000$

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

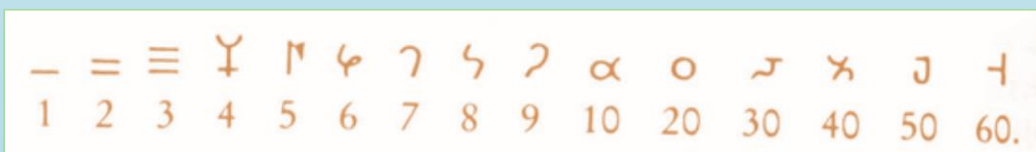
Los hindúes

Los hindúes alrededor del siglo III a.C., comenzaron a poner por escrito los números de 9 cifras, propios de la escritura brahmi. A esta civilización se le atribuye el arte de contar, porque fueron ellos quienes por primera vez utilizaron el principio de notación numérica 24×10^{24} que representa el número de divinidades en el poema épico del Mahabarata.

Se cree que esta civilización fue la primera en utilizar el sistema de numeración posicional, y además en el siglo V d.C. apareció el concepto de cero, datado en el documento Lokavibhaga (tratado de cosmología). Y fue en el año 510 cuando el astrónomo indio Aryabhata inventó una notación numérica que precisó un conocimiento perfecto del cero y del principio de posicionamiento en base decimal. Esta notación le permitió realizar fácilmente raíces cuadradas y cúbicas.

En el año 628, el matemático y astrónomo Brahmagupta utiliza asiduamente este sistema de numeración posicional. Describe métodos de cálculo con las 9 cifras y el cero (muy similares a los actuales). Dio las reglas algebraicas fundamentales, de números positivos y negativos, en las que el cero está presente como concepto matemático, y definió el infinito matemático como el inverso del cero. Fue en este momento cuando se formalizó el uso de los números negativos.

Así este sistema de numeración fue perfeccionándose hasta llegar a convertirse en el mejor y adecuado sistema de numeración que resolvió todos los problemas de cálculo. Mediante este sistema es posible escribir cualquier número usando tan sólo diez dígitos, o sea que es un sistema de numeración de base diez o decimal. Los hindúes eran hábiles matemáticos: resolvieron un gran problema al inventar el símbolo del cero (0), denominándolo sunya, y las cifras utilizadas por los hindúes se convirtieron en las cifras que utilizamos actualmente (Remedios Macías, 2009).



El sistema de numeración Hindoarabico: nuestro sistema actual

El sistema actual fue inventado por los indios y transmitido a Europa por los árabes. Antes del siglo VII los indios idearon el sistema tal y cual como hoy lo conocemos, sin ningún cambio en la forma en la que escribimos los nueve dígitos y el cero. Aunque nos referimos a nuestro sistema de numeración como árabe, las pruebas arqueológicas y documentales demuestran el uso del cero tanto en posiciones intermedias como finales desde el siglo III.

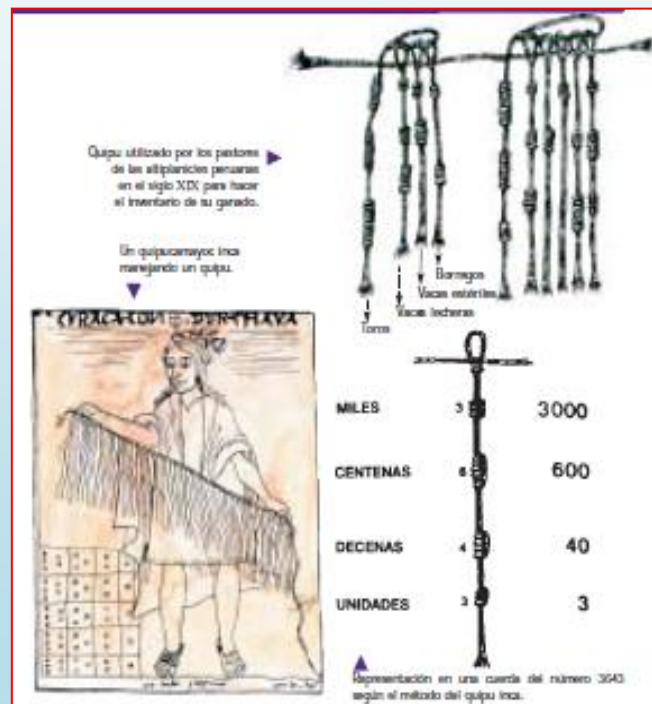
La evolución del sistema de numeración hindú, se inició con nueve símbolos diferentes, uno por cada número del uno al nueve. Estos han cambiado con el tiempo, pero llegaron a Europa en su forma actual en el siglo XVI y ahora se escribe así: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

La gran innovación hindú fue la invención de un símbolo especial para una hilera intacta del ábaco, ésta fue la representación gráfica del cero. A este símbolo los árabes la llamaron “sifr” que significa “vacío”. Esta palabra ha llegado hasta nosotros como una “cifra” o como “cero” (García Jiménez, 2009).

Los incas

A comienzos del siglo XII d. C., la civilización incaica, que ocupaba los territorios de Perú, Bolivia, Ecuador y Chile, llevaba archivos y una contabilidad muy precisa gracias a un dispositivo llamado “Quipu”, éste era un sistema de cuerdas multicolores con nudos. Su sistema era de base decimal. El quipu se utilizaba para registrar datos importantes, como la cantidad de producción de las cosechas, el número de habitantes, etc., y sólo podía ser leído por personas especializadas, denominados Kipucamayocs.

Sobre una cuerda colgante había varios puntos de referencia a distintas alturas. En la referencia inferior se hacían tantos nudos como fuera necesario para las unidades, en la segunda para las decenas y así sucesivamente. Por ejemplo, en cuerdas blancas se hacía el inventario de ganado ovino, una cuerda era para los borregos, otra para los corderos, luego las ovejas, etc. Con el mismo criterio, en un manojo de cuerdas verdes se hacía el inventario del ganado bovino (Zeballos).



CONTAMOS COMO LOS ANTIGUOS

ACTIVIDAD N° 01

- Codifica los siguientes números indoarábigos en la notación indicada:
 - En notación egipcia:

42		<table><tr><th>Símbolo indoarábigo</th><th>Símbolo egipcio</th></tr><tr><td>1</td><td> </td></tr><tr><td>10</td><td>∩</td></tr><tr><td>100</td><td>∩∩</td></tr><tr><td>1 000</td><td>∩∩∩</td></tr><tr><td>10 000</td><td>∩∩∩∩</td></tr><tr><td>100 000</td><td>∩∩∩∩∩</td></tr><tr><td>1 000 000</td><td>∩∩∩∩∩∩</td></tr></table>	Símbolo indoarábigo	Símbolo egipcio	1		10	∩	100	∩∩	1 000	∩∩∩	10 000	∩∩∩∩	100 000	∩∩∩∩∩	1 000 000	∩∩∩∩∩∩
Símbolo indoarábigo	Símbolo egipcio																	
1																		
10	∩																	
100	∩∩																	
1 000	∩∩∩																	
10 000	∩∩∩∩																	
100 000	∩∩∩∩∩																	
1 000 000	∩∩∩∩∩∩																	
364																		
1380																		

- En notación romana:

97		<table><tr><td>I</td><td>1</td></tr><tr><td>V</td><td>5</td></tr><tr><td>X</td><td>10</td></tr><tr><td>L</td><td>50</td></tr><tr><td>C</td><td>100</td></tr><tr><td>D</td><td>500</td></tr><tr><td>M</td><td>1000</td></tr></table>	I	1	V	5	X	10	L	50	C	100	D	500	M	1000
I	1															
V	5															
X	10															
L	50															
C	100															
D	500															
M	1000															
137																
10668																

- En notación griega:

7		ΙΓΔΑΗ 151050100 ϞΧϠΜ 5001000500010000
560		
16		

- Decodifica los siguientes números expresados en diferentes sistemas de numeración:

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 06/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“Fracción egipcia”

II. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD	Matematiza situaciones	▪ Deduce la necesidad de extender los números enteros a los números racionales para resolver diferentes situaciones problemáticas ▪ Reconoce los números decimales y su pertenencia al conjunto de los racionales ▪ Ordena y compara los números racionales ▪ Reconoce los números fraccionarios y su pertenencia al conjunto de los racionales ▪ Interpreta el significado de los números racionales en diversas situaciones y contextos ▪ Interpreta las fracciones como un operador matemático
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	▪ Compara y establece relaciones de orden entre los elementos del conjunto de los racionales ▪ Resuelve operaciones matemáticas utilizando fracciones ▪ Resuelve problemas que implican el uso de números racionales

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (10 minutos)

- El docente presenta a los estudiantes una reseña histórica sobre la necesidad de extender el conjunto de los números enteros, y la idea de fracción (anexo 1)
- Durante la reseña, los estudiantes deben subrayar las partes más resaltantes del texto
- Después de la reseña, reflexionan sobre la necesidad que el hombre tuvo al resolver problemas de la vida cotidiana, ya que no podían ser resueltos con el uso de los números enteros; y por ende tuvo que recurrir a otro conjunto más amplio

Desarrollo: (70 minutos)

- El docente presenta el propósito de la clase que es explorar el conjunto de los números racionales y el uso de las fracciones

LOS NÚMEROS RACIONALES

FRACCIONES:

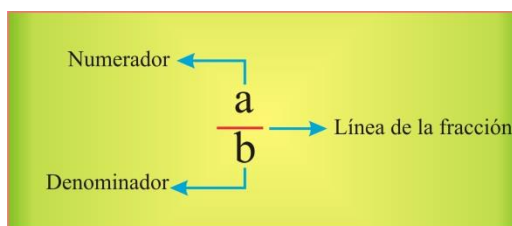
La fracción es la representación simbólica de un número racional, escrito de la forma $\frac{a}{b}$, donde “a” y “b” son números enteros y $b \neq 0$. El valor del número representado corresponde al cociente de “a” entre “b”.

Fracción = $\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$

Los términos de la fracción reciben el nombre de numerador “a” y denominador “b”.

- **EL DENOMINADOR:** indica en cuantas partes iguales, se ha dividido la unidad principal.
- **EL NUMERADOR:** indica cuantas de estas partes se toman, o se consideran.
- **LÍNEA DE LA FRACCIÓN:** separa al numerador del denominador.

¡CUIDADO!
El denominador de una fracción nunca puede ser cero, porque no tiene sentido dividir un número en cero partes iguales.

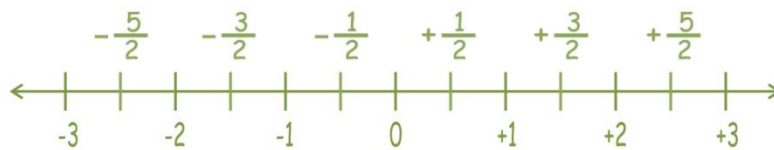


REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA

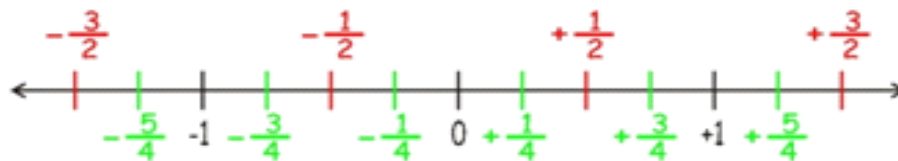
La recta numérica es una forma gráfica de representar los conjuntos numéricos. Ya sabemos que los números enteros ($\mathbb{Z}$) se representan en la recta numérica así:



Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los segmentos que tienen por extremo números enteros consecutivos (asignamos números que representan a los puntos medios de cada unidad) tendremos representadas las fracciones de denominador 2



Si en lugar de dividir cada segmento en dos partes iguales se les divide en cuatro partes iguales, quedan representadas las fracciones de denominador 4



Como este proceso puede continuar indefinidamente, no solo tomando la mitad, la cuarta, sino también la tercia, quinta, séptima, etc. de cada segmento. De esta manera se tiene en la recta un número infinito de puntos de coordenada racional.

Clasificación de la fracciones

Las fracciones podemos clasificarlas en *homogéneas* o *heterogéneas* de acuerdo a la relación de igualdad o desigualdad entre sus denominadores, respectivamente. Según sea la fracción mayor o menor que la unidad y de acuerdo a la relación entre sus términos, se clasifican en fracciones propias e impropias.

a) Fracciones homogéneas

Son aquellas fracciones que tienen el mismo denominador.

Ejemplo:

$$\frac{3}{8}; \frac{7}{8}; \frac{9}{8}; \dots$$

b) Fracciones heterogéneas

Son aquellas fracciones que tienen diferente denominador.

Ejemplo: $\frac{7}{2}; \frac{4}{5}; \frac{9}{4}; \dots$

c) Fracción propia

Se dice que una fracción es propia cuando el numerador es menor que el denominador. Toda fracción propia es menor que la unidad y representa una parte de un todo.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3}; \frac{5}{6}; \frac{3}{7}; \dots$$

d) Fracción impropia

Se dice que una fracción es impropia, cuando el numerador es mayor o igual que el denominador. Toda fracción impropia es mayor o igual a uno.

$$\frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{9}{4}; \dots$$

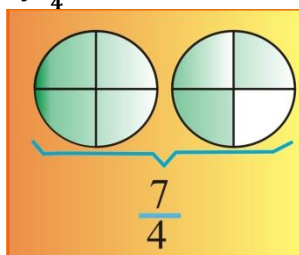
Por lo tanto, toda fracción impropia se puede descomponer en la suma de un número entero y una fracción propia.

e) Número mixto: Es la suma de un número entero y una fracción propia. Toda fracción impropia se puede expresar en forma de número mixto.

Ejemplo:

$$\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4}$$

1 entero y $\frac{3}{4}$



$1\frac{3}{4}$ es un mixto, donde:

la parte entera es 1 y

la parte fraccionaria es $\frac{3}{4}$

FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos o más fracciones son equivalentes cuando representan la misma parte de un entero o de más enteros.

Dos fracciones cualesquiera $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ son iguales o equivalentes precisamente si su producto cruzado es igual.

Esto es:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \times d = b \times c$$

Ejemplos:

- $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6}$ son equivalentes

Porque $-2 \times 6 = 3 \times (-4)$

$$-12 = -12$$

- $\frac{24}{27} = \frac{8}{9}$ son equivalentes

Porque $24 \times 9 = 27 \times 8$

$$216 = 216$$

OPERACIONES CON LAS FRACCIONES

➤ **LA ADICIÓN Y LA SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES POSITIVAS Y NEGATIVAS**

Para sumar o restar fracciones se siguen los siguientes pasos:

- Se halla el m. c. m. de los denominadores
- Se transforman todas las fracciones en homogéneas, para lo cual se divide este (m. c. m.) entre cada denominador y luego se multiplica cada cociente por el respectivo numerador
- Se suman o restan los nuevos numeradores
- Se simplifica la fracción resultante y se obtiene el número mixto, si fuese necesario
- Si se trata de mixtos se les transforma previamente a fracciones

Ejemplo:

$$a) \quad \frac{4}{5} + \frac{(-2)}{3} = \frac{12+(-10)}{15} = \frac{12-10}{15} = \frac{2}{15}$$

PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE FRACCIONES

PROPIEDAD CONMUTATIVA	PROPIEDAD ASOCIATIVA	ELEMENTO NEUTRO PARA LA ADICIÓN DE FRACCIONES
❖ El orden de los sumandos no altera la suma Para todo racional $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se cumple que: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$	❖ La forma como se agrupan los sumandos no altera la suma. Para todo racional $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ se cumple que: $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$	❖ Cero es el elemento neutro de la adición de fracciones. $\frac{a}{b} + \frac{0}{b} = \frac{a}{b}$

➤ MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES POSITIVAS Y NEGATIVAS

Para multiplicar fracciones se emplea el siguiente procedimiento:

- Se tiene en cuenta que dos signos iguales dan resultado positivo y dos signos diferentes dan resultado negativo.
- Se multiplican numeradores con numeradores y denominadores con denominadores.
- Se simplifica el resultado y se obtiene el mixto correspondiente, si lo hay.
- Si se trata de mixtos se transforman previamente los mixtos a fracción.

Ejemplos:

$$a) \quad \frac{-4}{3} \times \frac{(-6)}{5} = \frac{-4(-6)}{3 \times 5} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} = 1 \frac{3}{5}$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

PROPIEDAD CONMUTATIVA	PROPIEDAD ASOCIATIVA	PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN CON RESPECTO A LA ADICIÓN

❖ El orden de los factores no altera el producto Para todo racional $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$: ❖ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$	❖ La forma de agrupar los factores no altera el producto Dadas las fracciones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ se cumple que: ❖ $(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} \times \frac{e}{f})$	❖ Si se multiplica una fracción por una adición o sustracción, el resultado es igual a la adición o a la sustracción de los productos parciales respectivamente. Dado los racionales: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$: ❖ $\frac{a}{b} \times (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$
--	---	--

➤ LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir dos fracciones se multiplica la primera fracción por el inverso de la segunda.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$

➤ LA POTENCIACIÓN DE FRACCIONES

La potencia de una fracción es el resultado de multiplicar dicha fracción tantas veces como indica el exponente.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

Producto de potencias de igual base	Cociente de potencias de igual base	Potencia de una potencia	Exponente negativo
$\left(\frac{a}{b}\right)^m \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$	$\left[\left(\frac{a}{b}\right)\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \times n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

CIERRE (10 min)

- Los estudiantes desarrollan la actividad N° 01 (anexo 2).

IV. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- El docente entrega en fotocopias la actividad N° 02.

V. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ Láminas, fotocopias y plumones

RESEÑA HISTÓRICA DE LOS NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

Como ha sucedido por la gran mayoría de los conceptos matemáticos, también para los números racionales, su descubrimiento fue debido a la necesidad de resolver problemas de la vida cotidiana.

Los antiguos necesitaban medir longitudes, áreas, tiempo, pesos y todo tipo de medidas. Estas actividades presentaron un problema: los números naturales no son suficientes para responder con exactitud a estas nuevas necesidades, ya que estas medidas requieren la división de la unidad en partes más pequeñas. Por esto fue necesario ampliar el concepto de número natural y así surgieron los números racionales.

¿Cuál es el resultado de dividir: $(+20) : (+3)$?

Como verás, no existe en el conjunto de números enteros ($\mathbb{Z}$) un número que multiplicado por $(+3)$ dé como resultado $(+20)$. Luego, en $\mathbb{Z}$, no es posible resolver la ecuación $(+3) \times = (+20)$.

Ante esta situación, surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números $\mathbb{Z}$, a otro que llamamos $\mathbb{Q}$ (números racionales)

La idea de los números racionales nace cuando el hombre tuvo la necesidad de resolver problemas en la vida cotidiana que no podían ser resueltos con el uso de los números enteros.

Los números racionales y el uso de las fracciones surgieron muy pronto en la historia de las matemáticas

Al enfrentar las nuevas necesidades que la vida cotidiana presentaba; como medir longitudes, áreas de terrenos, pesos, repartir las cosechas e imponer tributos. El hombre descubrió que no era suficiente contar con los números naturales ya que tenía que dar medidas que requerían divisiones más pequeñas que la unidad. Al resolver este problema se empezó a formular la idea de los números racionales (Flores Gil, 2008).

La noción general de número racional como relación entre dos enteros fue utilizada por los pitagóricos en el siglo VI a. C. Años antes, los babilonios y los egipcios habían utilizado algunas fracciones, que tenían como numerador "1". Así los números racionales o fraccionarios aparecieron en la historia de las matemáticas.

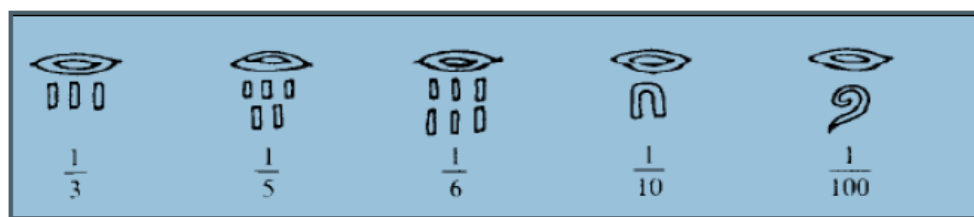
Las fracciones aparecen ya en los primeros textos matemáticos de los que hay constancia, quizás uno de los más antiguos y más importantes sea el Papiro Rhind de Egipto, escrito hacia el 1650 a.C. y que pasa por ser la mayor fuente de conocimiento de la matemática egipcia.

En Occidente tuvieron que pasar muchos siglos hasta que los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indo árabe. Este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los números racionales en la vieja Europa.

Sin embargo, no fue hasta el s. XIII cuando Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo el concepto de números quebrados o números “ruptus”, empleando además la raya para separar el numerador del denominador (Flores Gil, 2008).

Los egipcios

Los hombres de la edad de piedra no representaron las fracciones, ya que no tenían necesidad de ellas. Fue en la Edad del Bronce, al adquirir algunos pueblos un nivel cultural más elevado, cuando apareció dicha necesidad. En los jeroglíficos egipcios encontramos inscripciones que representan **fracciones** unitarias, aquellas cuyo numerador es “1”. Para representarlas se utilizaba un jeroglífico con forma de “óvalo” situado encima del número que actúa como denominador. Algunas fracciones, como $\frac{1}{2}$ ó $\frac{1}{4}$, tenían símbolos especiales (Remedios Macías, 2009).



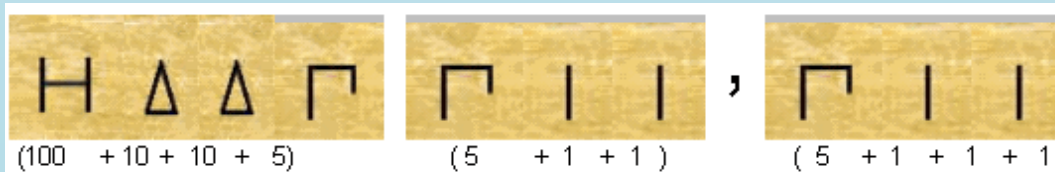
Ejemplos de fracciones egipcias.

Los griegos

Los griegos también utilizaban **fracciones**; comenzaron, al igual que los egipcios, con fracciones unitarias, escribiendo el número y a continuación un acento o señal **diacrítica**. Poco después comenzaron a usar fracciones de cualquier tipo y establecieron la equivalencia de fracciones, a partir de las proporciones. Esto surgió debido al interés de convertir un rectángulo de lados a y b en un cuadrado, para lo que se precisaba al resolver $a/x = x/b$ (Remedios Macías, 2009).

Además el sistema de numeración griego también manejó las cifras fraccionarias, estas se representaban en la parte superior derecha (a modo de exponente) con una comilla para el numerador y dos comillas para el denominador, las cifras se colocaban seguidas. Un ejemplo para este tipo de operación es 125,87.

Esta cifra se expresa en número mixto = > 125 $\frac{7}{8}$



"FRACCIÓN EGIPCIA"

ACTIVIDAD Nº 01

1. Las fracciones de numerador 1, inversas de los números enteros, se indicaban colocando el signo  encima del número entero correspondiente por ejemplo, $\frac{1}{4}$ se escribía: 

a) Escribe con signos egipcios las siguientes fracciones: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{21}$; $\frac{1}{102}$

b) ¿Qué piensa el personaje que está partiendo la torta?

.....



2. Para representar cualquier otra fracción los egipcios expresaban como la suma de fracciones unitarias, intentando poner siempre denominadores lo más pequeños posible.

a) Representar: $\frac{7}{12}$; $\frac{15}{26}$

ACTIVIDAD N° 02

- 1) Escribe una fracción equivalente a $\frac{3}{20}$ y cuyo denominador sea 220.
- 2) Halla el valor de x que hace iguales o equivalentes los siguientes pares de fracciones:
 - a) $\frac{-3}{4}$ y $\frac{x}{60}$
 - b) $\frac{4}{11}$ y $\frac{12}{x}$
 - c) $\frac{4}{x}$ y $\frac{x}{25}$
- 3) La primera parte de un examen constaba de 20 preguntas y la segunda de 30. Elisa acertó $\frac{4}{5}$ de las preguntas de la primera parte y $\frac{14}{15}$ de la segunda. Juan acertó $\frac{9}{10}$ de la primera parte y $\frac{13}{15}$ de la segunda. ¿Quién acertó más preguntas en total?
- 4) Escribe una operación combinada para el siguiente problema, y resuélvelo.
Luís, Pedro y Antonio reunieron sus propinas. Luís tiene seis octavos de s/. 100; Pedro, cinco tercios de s/. 54, y Antonio, cuatro décimos de s/. 64. ¿Cuánto tienen entre los tres?
- 5) Alberto y Jorge juegan fútbol en el mismo equipo. Al final de la temporada quieren saber quién ha jugado más partidos. Para ello, consultan el registro de participación y comprueban que Alberto jugó $\frac{11}{15}$ partidos y Jorge $\frac{4}{6}$. Si en la temporada se celebraron 30 partidos, ¿quién participó en más encuentros?

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 08/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“LOS NÚMEROS RACIONALES”

II. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD	Matematiza situaciones	▪ Aproxima números decimales aplicando las propiedades ▪ Identifica las características de los decimales exactos y periódicos ▪ Interpreta los números racionales como cociente de una fracción
	Comunica y representa ideas matemáticas	▪ Representa los números racionales por medio de fracciones y números decimales ▪ Representa un número racional por medio de su fracción generatriz
	Elabora y usa estrategias	▪ Calcula la fracción generatriz de un número decimal
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	▪ Analiza y sintetiza los procesos para resolver problemas con números decimales ▪ Analiza datos y procesos matemáticos para hallar la fracción generatriz de un número decimal exacto y de uno periódico

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (10 minutos)

- El docente revisa la tarea.
- El profesor junto con los estudiantes, resuelven los problemas de mayor dificultad, presentados en la tarea.

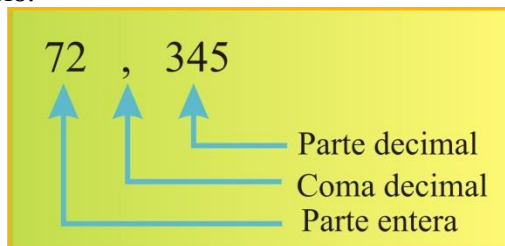
Desarrollo: (70 minutos)

NÚMERO DECIMAL

Es una representación lineal que consta de una parte entera y de una parte decimal, ambas separadas por una coma.

Recordemos que un número decimal consta de las siguientes partes: parte entera, coma decimal y parte decimal.

Ejemplo:



FRACCIÓN GENERATRIZ

Todo número decimal (exacto, periódico y periódico mixto) tiene su equivalente en forma de fracción. La fracción que genera un número decimal se llama fracción generatriz.

- Generatriz de un número decimal exacto: para hallar la fracción generatriz de un número decimal exacto, se escribe como numerador todo el número sin considerar la coma decimal, y como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal. Luego, se simplifica hasta obtener la fracción generatriz.

Ejemplo:

a) $0,008 = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$

- Generatriz de un número decimal periódico puro: para hallar la fracción generatriz de un número decimal periódico puro se escribe como numerador todo el número sin considerar la coma decimal, menos la parte entera, y como denominador, tantos nueves como cifras tiene el período.

Ejemplo:

a) $2,\widehat{81} = \frac{281-2}{99} = \frac{279}{99} = \frac{31}{11}$

- Generatriz de un número decimal periódico mixto: para hallar la fracción generatriz de un decimal periódico mixto, se escribe como numerador todo el número sin considerar la coma decimal, menos el número que resulta de suprimir las cifras del período; y como denominador, tantos nueves como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica.

Ejemplo:

a) $3,7\widehat{45} = \frac{3745-37}{990} = \frac{3708}{990} = \frac{206}{55}$

- Los estudiantes desarrollan la actividad N° 01 (anexo 2).

CIERRE (10 min)

- El docente al terminar la sesión, plantea las siguientes preguntas:
 - ¿Cómo se calcula la fracción generatriz de un número decimal exacto?
 - ¿Cómo se calcula la fracción generatriz de un número decimal periódico puro?
 - ¿Cómo se calcula la fracción generatriz de un número decimal periódico mixto?

IV. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Los estudiantes resuelven los problemas 6 y 7 de la actividad N° 1.

V. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ fotocopias
- ❖ Plumones

Anexo 2

Actividad N° 01

- 1) Halla la fracción generatriz.
a) $0,17\overline{2}$ b) $-0,6\overline{3}$ c) 1,6 d) $2,5\overline{4}$
- 1) Mariela trabaja en una empresa donde le pagan s/. 1395 de sueldo. Luego de 25 días de trabajo se ve obligada a renunciar y la empresa le paga s/. 1070 y le entrega una bolsa de víveres. Si Mariela quedó conforme, ¿en cuánto valorizó la bolsa de víveres?
- 2) Un estudiante tiene que resolver 120 problemas. Un día resuelve los $\frac{5}{12}$ y al día siguiente los $\frac{3}{7}$ del resto. ¿Cuántos problemas le falta resolver?
- 3) El perímetro de un triángulo equilátero mide 9,75 cm. ¿Cuánto mide cada lado?
- 4) María quiere hacerse un vestido y necesita 3,5 metros de tela. Si la tela le cuesta s/. 19,75 el metro y la modista le cobra s/.72 por la confección, ¿Cuánto gastará en total?
- 5) Mario lee un libro de 420 páginas. El primer día lee $\frac{1}{12}$ del total de páginas, el segundo día lee $\frac{1}{11}$ de las páginas que quedan, el tercer día $\frac{1}{14}$ del nuevo resto. ¿Cuántas páginas le faltan leer?
- 6) En un colegio hay 480 alumnos; $\frac{1}{5}$ frecuentan el primer grado; $\frac{3}{20}$ el segundo; $\frac{3}{16}$ el tercero; $\frac{1}{6}$ el cuarto y los restantes el quinto. ¿Cuántos alumnos frecuentan a cada grado?
- 7) Con los datos del letrero, resuelve los problemas.

Un millar de hojas bond	s/. 40
Una docena de lapiceros	s/. 48
Una decena de cuadernos	s/. 30
Un ciento de sobre	s/. 15

- Jorge compra $\frac{3}{4}$ de millar de hojas bond, $\frac{2}{3}$ de docena de lapiceros y $\frac{2}{5}$ de ciento de sobres. ¿Cuánto pagará por todo?
- Miguel compra $\frac{3}{5}$ de millar de hojas bond y $\frac{2}{5}$ de decena de cuadernos. ¿Cuánto recibe de vuelto, si paga con un billete de s/. 50?
- Pilar pide $\frac{6}{8}$ de millar de hojas bond, pero la vendedora le cobra por $\frac{9}{12}$ de millar. ¿El cobro es justo?

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 09/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“Necesito más números”

II. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD	Matematiza situaciones	- Reconoce los números irracionales y su pertenencia al conjunto de los reales - Interpreta el significado de los números irracionales en distintos contextos y situaciones significativas
	Comunica y representa ideas matemáticas	Representa simbólicamente los números irracionales
	Elabora y usa estrategias	Aplica el concepto de los números irracionales para analizar los números de infinitas cifras
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	- Plantea conjeturas basadas en la experimentación, para reconocer números irracionales en la recta numérica - Generaliza que todo número irracional es un decimal infinito no periódico

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (15 minutos)

- El docente presenta a los estudiantes una reseña histórica sobre la evolución de la idea de número, los diferentes sistemas de numeración utilizados en las diferentes culturas.
- El docente presenta a los estudiantes una actividad llamada: “Necesito más números”

NECESITO MÁS NÚMEROS

1º Coge tu calculadora y halla el valor decimal de $873/1000$.

¿Qué obtienes? ¿Cuántos decimales tiene exactamente el número obtenido? Esta es una fracción decimal exacta.

2º Halla ahora el valor decimal de $205/990$

¿Qué sucede? ¿Qué lo diferencia del número anterior? ¿Cuántas cifras aparecen en la pantalla de la calculadora? ¿Son todas las que tiene ese número? En realidad tiene infinitas cifras decimales que se repiten a partir de una de ellas. A la parte decimal que se repite se le llama periodo. ¿Cuál es el periodo de este número? A la parte decimal que no se repite se le llama ante periodo. ¿Cuál es el ante periodo en este caso?

3º La raíz cuadrada de 2

Los números anteriores proceden de fracciones, por lo tanto son racionales. ¿Existen otros números que no son racionales? Prueba a poner en tu calculadora $\sqrt{2}$. ¿Qué sucede? ¿Se repiten las cifras? ¿Tiene periodo? ¿Ante periodo? ¿Cuántas cifras decimales crees que tiene? A este tipo de números los llamaremos irracionales (ya que no los podemos poner como un racional) y entre los irracionales y los racionales formamos el conjunto de los reales.

- Para realizar esta actividad organiza los alumnos en cuatro grupos e invita a los alumnos a trabajar de forma activa.

Desarrollo: (60 minutos)

- El docente presenta el propósito de la clase que es explorar el conjunto de los números irracionales.

LOS NÚMEROS IRRACIONALES (I)

- El docente presenta una breve reseña histórica de los números irracionales y de la necesidad de ampliar el conjunto de los racionales para dar soluciones a las nuevas necesidades del hombre (Anexo 2).

El conjunto de los números irracionales (I) está formado por todos aquellos números que no pueden ser expresados como fracción. Su expresión decimal tiene un número infinito de cifras que no se repiten de forma periódica.

Existen infinitos números irracionales, por ejemplo:

- $\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{5}; \dots$ En general, si “a” es un número natural diferente de cero y no cuadrado perfecto, $\sqrt{a}$ es irracional.

- Las raíces enésimas inexactas, como: $\sqrt[3]{6}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[5]{2}$; ...

NÚMEROS IRRACIONALES NOTABLES

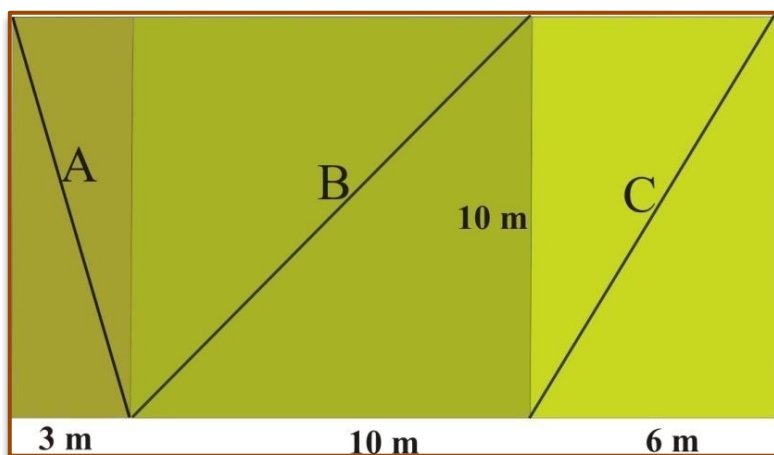
Desde la antigüedad algunos números han tenido propiedades especiales, estos son:

$$\pi = 3,141592... \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \mathbf{1,618033} ... \quad e = 2,718281...$$

- El docente presenta en un papelógrafo una situación problemática referida a determinar las diagonales de las chacras rectangulares.

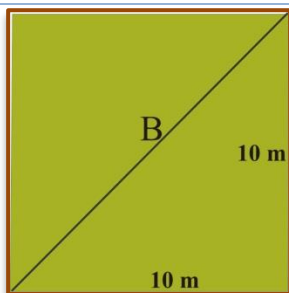
➤ *Don Gaspar cuenta con tres chacras rectangulares. Él desea conocer la medida de las diagonales de cada recinto a fin de hacer su recorrido ahorrando tiempo. ¿Cuánto miden las diagonales de cada una de las chacras?*

- El docente solicita a los estudiantes que copien la situación problemática en sus cuadernos. Luego los orienta para que la comprendan. Les pide que la lean en silencio y subrayen los datos que encuentren. Afín de comprobar la comprensión, el docente pregunta:
 - ✓ ¿De qué trata el problema?
 - ✓ ¿Cuántas chacras hay?
 - ✓ ¿Qué te piden calcular? Describe el problema con tus palabras.
- Los estudiantes, acompañados por el docente, elaboran su plan para resolver el problema. El docente los orienta planteándoles algunas interrogantes:
 - ✓ ¿Qué estrategias deben aplicar para resolver el problema?
 - ✓ ¿Aplicarán alguna propiedad especial?
 - ✓ ¿Es necesaria una representación gráfica?
- El docente les brinda unos minutos para responder las interrogantes. Luego enfatiza la presentación de la resolución del problema en sus cuadernos.
- Los estudiantes deben lograr la siguiente representación.
- El docente acompaña a los estudiantes a fin de iniciar el plan elaborado por cada equipo.



El docente orienta los estudiantes para que inicien por la chacra B. Dando pautas sobre el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} x^2 &= 10^2 + 10^2 \\ x^2 &= 200 \\ x &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{100} \end{aligned}$$



$$x = 10\sqrt{2}$$

- Luego pasan a determinar la diagonal de la chacra A y C y realizan la representación y la aplicación de sus propiedades:



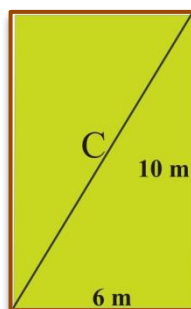
El docente acompaña a los equipos para que apliquen el Teorema de Pitágoras:

$$y^2 = 10^2 + 3^2$$

$$x^2 = 100 + 9$$

$$x^2 = 109$$

$$x = \sqrt{109} \text{ m}$$



El docente acompaña a los equipos para que apliquen el Teorema de Pitágoras:

$$z^2 = 10^2 + 6^2$$

$$z^2 = 100 + 36$$

$$z^2 = 136$$

$$z = \sqrt{136} \text{ m}$$

CIERRE (15min)

- Al finalizar el cálculo, el docente pregunta:
 - ¿Qué tipo de números se han obtenido?
 - ¿Se puede decir que todo irracional es un decimal infinito no periódico? Justifica tu respuesta.
- Luego, el docente propone otra situación problemática:
 - Realiza la representación de los tres valores de las diagonales en la recta numérica. Para ello, apóyate del gráfico para ubicar el número $10\sqrt{2}$.

IV. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- El docente solicita a los estudiantes que desarrollen la siguiente actividad:

1) Resuelve e identifica si el resultado pertenece a Q o I.

a) $7 + \sqrt{2}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

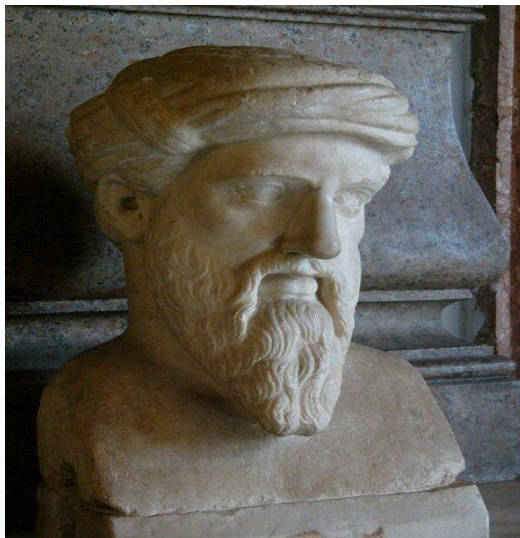
c) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

V. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ Fichas de trabajo
- ❖ Fotocopias
- ❖ Plumones

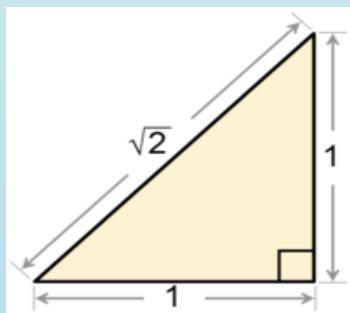
LOS NÚMEROS IRRACIONALES QUE PUSIERON EN CRISIS PITÁGORA



“LA MUERTE DE HIPOTASO DE METAPONTO”

Hoy vamos a comentar el origen del término *irracional* para nombrar a aquellos números reales que no son racionales, es decir, números reales que no se pueden expresar como un cociente de números enteros. Todo se remonta a la Grecia clásica, en particular, a la época pitagórica. Pitágoras nació en la isla de Samos, en el año 582 a.C. donde completó sus estudios para, posteriormente, crear su famosa escuela pitagórica en Crotona. Aunque más que una escuela, llegó a ser una especie de secta. Pero vamos a ser políticamente correctos y vamos a llamarlos organización. La organización pitagórica tenía como creencia fundamental que todas las cosas son, en esencia, números. O dicho de otro modo, que una vez definida una *UNIDAD* todo lo que nos rodea es *MENSURABLE*, es decir, que puede medirse a través de esta unidad. Pero para los pitagóricos el concepto de medir significaba que o bien era un número entero de veces la unidad, o bien un número entero de partes de la unidad (o una mezcla de ambas). En definitiva, cocientes de números enteros.

El pensamiento pitagórico se levanta sobre una estructura matemática racional: todo lo que se salga de su orden de pensamiento, escapa a la razón. Por ello esta escuela entró en crisis. El archiconocido Teorema de Pitágoras fue redescubierto por esta escuela de pensamiento, pero con él llegó el problema, pues como primera aplicación del teorema obtenemos un nuevo número $\sqrt{2}$, y resulta que este número no es mensurable con respecto a la unidad.



La $\sqrt{2}$ equivale a la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo e isósceles cuyos catetos tienen una longitud igual a la unidad.

La raíz cuadrada de 2, o simplemente raíz de 2, se define como el único número real positivo tal que, multiplicado por sí mismo, es igual a 2. Su resultado no llega a ser nunca periódico, porque siempre tiene decimales nuevos.

1.41421356237...

Decir que este número es inconmensurable es decir que no existe ninguna razón racional y ninguna fracción que pueda expresarlo. De esta manera no puede ser un número racional.

Como este hecho ponía en serio peligro la filosofía pitagórica y dado que escapaba a su razón, decidieron darle el nombre de *IRRACIONAL*, además de ocultar este descubrimiento a la comunidad filosófico-científica de la época. De hecho, se cuenta que uno de los miembros de esta escuela, Hipaso de Metaponto, fue el que dio con una demostración de la irracionalidad del número $\sqrt{2}$.

Sin embargo, parece ser que Hipaso no cumplió el voto de silencio que pesaba sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$, por lo que la hermandad pitagórica lo habría expulsado de la escuela y habrían erigido una tumba con su nombre, mostrando así que para ellos, él estaba muerto. De hecho, la leyenda cuenta que los propios miembros de la hermandad pitagórica ahogaron a Hipaso.

En fin, que como habéis podido comprobar, incluso dentro de las matemáticas hay leyendas. Es más, hasta lo más irracional, puede deberse a un hecho completamente racional. E incluso se puede morir, como ya se ha visto otras veces, por un descubrimiento matemático.

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 13/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“¿UNO DE ELLOS, UNO DE NOSOTROS?”

II. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD	Matematiza situaciones	▪ Comprende el conjunto de los números reales, estableciendo relaciones entre los conjuntos de los racionales e irracionales
	Elabora y usa estrategias	▪ Aplica propiedades al realizar las operaciones con los números reales.
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	▪ Identifica y procesa la información al resolver problemas que implican multiplicar o dividir números reales

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (15 minutos)

- El docente llega al aula a la hora correspondiente demostrando puntualidad y responsabilidad; saludando cordialmente a los estudiantes.
- El docente presenta, a través de diapositivas la historia del número áureo a lo largo de la historia de la humanidad.

El número áureo



Desarrollo: (65 minutos)

- El docente organiza en grupos de 4 estudiantes para analizar la actividad 1
- Los estudiantes interpretan el conjunto de los reales como universo numérico, analizando las diferentes características del número dorado.
- El docente presenta el propósito de la clase que es explorar la densidad y completitud de los números reales.

NÚMEROS REALES

Los números reales resultan de la unión del conjunto de los racionales y los irracionales, y se designan con la letra R.

Densidad y completitud de los números reales: el conjunto de los números reales es denso porque entre cada par de números existen infinitos números; y es completo porque cada punto de la recta se corresponde como un número real.

Ejemplo: Consideramos el número irracional $\sqrt{2} = 1,41421356237 \dots$

- $\sqrt{2}$ está entre 1 y 2 aproximando a enteros. $1 < \sqrt{2} < 2$
- $\sqrt{2}$ está entre 1,4 y 1,5 aproximando a los décimos. $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$
- $\sqrt{2}$ está entre 1,41 y 1,42 aproximando a los centésimos. $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
- $\sqrt{2}$ está entre 1,414 y 1,415 aproximando al milésimo. $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

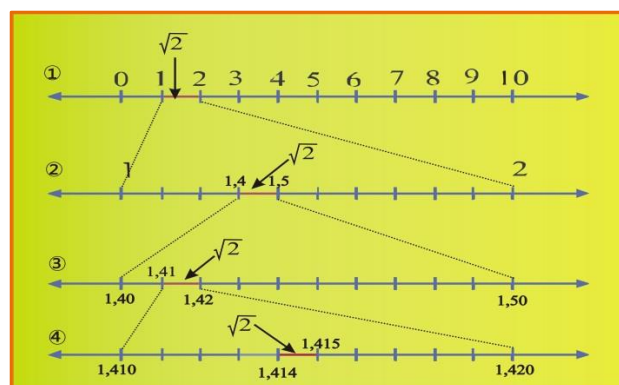
Los números que están en los extremos de la izquierda son todos menores que $\sqrt{2}$ y forman el conjunto de los números racionales aproximados a $\sqrt{2}$ por defecto:

$$\sqrt{2} = \{1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots\}$$

Los números que están en los extremos de la derecha son todos mayores que $\sqrt{2}$ y forman el conjunto de números racionales aproximados a $\sqrt{2}$ por exceso:

$$\sqrt{2} = \{2; 1,5; 1,42; 1,415; \dots\}$$

Gráficamente:



CIERRE (10min)

- Los estudiantes desarrollan la actividad N° 1.

IV. TAREA A TRABAJAR EN CASA

La sucesión de Fibonacci cumple diversas regularidades: si tomamos dos números de Fibonacci consecutivos, su cociente está muy cerca de la razón áurea $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874988 \dots$; cuanto más grande sean los números de Fibonacci más cerca estará la aproximación.

- ¿Crees que existen más números como este? Investiga sobre los números “e” y “pi” (π) detallando su origen y dando algunos ejemplos de sus usos.

V. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ Multimedia
- ❖ Fichas de trabajo
- ❖ Plumones

Actividad 1

¿UNO DE ELLOS, UNO DE NOSOTROS?

Ahora coge tu bono bus, tu DNI o alguna tarjeta que tengas de las dimensiones de estos. ¿Nunca te has preguntado por qué miden exactamente eso las tarjetas? ¿Por qué las carteras suelen tener un hueco para meter tarjetas de ese tamaño? Mide su anchura y su altura y divide el mayor entre el menor. ¿Qué sale?



Por último dibuja un rectángulo de 10 cm de ancho y 16,18 cm de largo. Evidentemente, si divides el largo entre el ancho vuelve a salir ese número... pero vayamos más allá. Dentro de ese rectángulo, haz un cuadrado de lado la anchura, apoyándote en alguna de sus esquinas. De esta forma has dejado dividido el rectángulo anterior en un cuadrado y otro rectángulo... ¡sorpresa! ¡Este nuevo rectángulo vuelve a tener la misma proporción! Compruébalo. Podríamos actuar de forma idéntica nuevamente dentro del nuevo rectángulo y volveríamos a obtener un rectángulo de las mismas proporciones. Este número tiene algo mágico. Pese a tener esa magia, no está tan lejos de nosotros como piensas. Fíjate donde aparece también este número... ¡Aparece hasta en tu propio cuerpo!...unos cuantos ejemplos:

La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal, la disposición de los pétalos de las flores, la distribución de las hojas en un tallo, la relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo, etc.
La relación entre el diámetro de la boca y el de la nariz

El número áureo o de oro (también llamado número dorado, razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción) representado por la letra griega ϕ (en honor al escultor griego Fidias), es el número irracional:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ que vale aproximadamente } 1,6180339887...$$

Se trata de un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como “unidad” sino como relación o proporción entre segmentos de rectas. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza en elementos tales como caracolas, el grosor de las ramas, etc.

¿Crees que existen más números como este? Investiga sobre los números “e” y “pi” (π) detallando su origen y dando algún ejemplo de sus usos.

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 15/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“LOS INTERVALOS”

II. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD	Matematiza situaciones	▪ Interpreta la idea de continuidad del conjunto de los reales
	Comunica y representa ideas matemáticas	▪ Representa gráficamente y simbólicamente intervalos de números reales

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (15 minutos)

- El docente cuenta la reseña histórica de los números reales (Anexo 2). Luego forma equipos de trabajo y presenta la siguiente actividad lúdica:

Jugando con nuestras tallas

Cada grupo recoge la estatura de cada integrante; luego un representante por grupo, anota en la pizarra la estatura mínima y máxima que tienen los integrantes de su grupo.

Partiendo de esta actividad el profesor explica la formación de intervalos.

Desarrollo: (60 minutos)

- El docente presenta el propósito de la clase que es explorar el conjunto de los números reales.

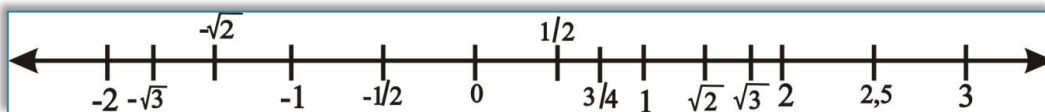
LOS NÚMEROS REALES (R)

El conjunto de los números reales (R), está formado por la unión del conjunto de los números racionales (Q) y el conjunto de los números irracionales (I). Se representa así:

$$R = Q \cup I$$

La recta real

La recta real se forma partiendo de la recta racional. Al representar en ella los números irracionales, se obtiene la recta real.



Intervalos numéricos

Un intervalo es un subconjunto del conjunto de los números reales, cuyos elementos están comprendidos entre dos límites que pueden o no pertenecer al intervalo.

- El docente presenta en un papelógrafo la siguiente tabla:

Los intervalos se clasifican en cerrados, abiertos, semiabiertos o ilimitados.

Intervalo	Representación		
	Simbólica	Notación de conjuntos	Gráficamente
abierto	$]a; b[$	$\{x/x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$	
cerrado	$[a; b]$	$\{x/x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$	
Abierto por la derecha	$[a; b[$	$\{x/x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$	
Abierto por la izquierda	$]a; b]$	$\{x/x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$	
Ilimitado por la izquierda	$]-\infty; a]$	$\{x/x \in \mathbb{R}; x \leq a\}$	
	$]-\infty; a[$	$\{x/x \in \mathbb{R}; x < a\}$	
Ilimitado por la derecha	$[a; +\infty [$	$\{x/x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$	
	$]a; +\infty [$	$\{x/x \in \mathbb{R}; x > a\}$	

- Los estudiantes individualmente desarrollan, la actividad N° 1

CIERRE (15 min)

- Los estudiantes, conjuntamente con el docente, elaboran las conclusiones:

INTERVALOS

Los intervalos son subconjuntos de los números reales que se pueden representar gráficamente en la recta numérica.

Intervalo abierto

$]a; b[= \{x/x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

Incluye a todos los reales comprendidos entre “a” y “b”, sin incluir a “a”, ni “b”.

Gráficamente:

IV. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- El docente solicita a los estudiantes que desarrollen la siguiente actividad:
- a. Escribir las siguientes desigualdades mediante intervalos abiertos, cerrados o semiabiertos en cada caso:

a) $-\infty \leq x \leq \frac{3}{2}$

b) $\frac{7}{3} \leq x \leq 6$

c) $-11 < x < 11$

d) $-\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{8}$

e) $\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{5}{2}$

f) $-4 < x < \frac{2}{7}$

g) $7 < x < \infty$

h) $-5 \leq x \leq 15$

i) $\frac{1}{7} < x < \frac{9}{7}$

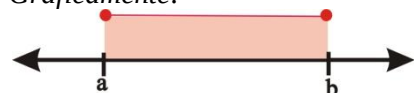


Intervalo cerrado

$$[a; b] = \{x/x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$$

Incluye a todos los reales comprendidos entre “a” y “b”, incluyendo a “a”, y “b”.

Gráficamente:



VII. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ Fichas de trabajo
- ❖ Fotocopias
- ❖ Plumones

RESEÑA HISTÓRICA DE LOS NÚMEROS REALES

En la matemática los números reales engloban tanto a los números racionales como a los números irracionales. El primer grupo está formado por todos los números que se pueden representar a través de una fracción, mientras que el segundo grupo son todos los números que no se pueden expresar de manera fraccionaria, porque tienen infinitas cifras decimales.

El uso de los números sirvió de base para todos los avances científicos y tecnológicos. Principalmente con la invención de la imprenta la cultura de los números se convirtió en el único medio de tránsito para el progreso de una sociedad, debido a las actividades del comercio. Este hecho, terminó universalizando el sistema de numeración (indo arábigo), aunque en un principio carecía de una base rigurosa, ya que en el momento no se consideraba necesario el formalismo de los números como en la actualidad.

Con el avance de la ciencia, aparecieron muchos problemas de cálculo que requerían de soluciones más precisas, evidenciando así la necesidad de una base rigurosa de la nueva matemática. Los números reales son los números que se pueden escribir como un cociente de dos números enteros, incluyendo aquellos números decimales aperiódicos.

Pues es así, que en el año 1872 cuando cinco matemáticos (*Weierstrass, Heine, Cantor y Dedekind*) dieron con la definición formal de número real. Tanto la definición axiomática como la de las clases de equivalencia de *sucesiones de Cauchy*, son laboriosas y artificiales. El origen de los números reales es más sencillo: $\mathbb{Q}$ es un cuerpo incompleto, necesitamos de otros números para representar ciertas medidas y magnitudes “no racionales”; que los pitagóricos de la antigua Grecia llamaban “incommensurables” y nosotros hoy día llamamos “números irracionales”. Números que, como su nombre indica, no pueden expresarse como una fracción.

Actividad N° 1

- 1) Representa gráficamente cada intervalo dado de manera simbólica.

Representación simbólica	Representación gráfica
$] -2, 1[$	
$[2; +\infty[$	
$[-2; 2[$	
$] -\infty; 2]$	
$[1; 2]$	
$] -\infty; 1[$	
$] -1; 1]$	
$] 1; +\infty[$	

- 2) Identifica tres formas de representar intervalos en R y completa.

Inecuación	Representación simbólica	Representación gráfica
$-4 < x < -1$		
	$[3; 8[$	
$-2 < x \leq 5$		
	$[4; 7]$	
$-2,5 < x \leq 8$		
	$[3/5; 2]$	

- 3) Marina pesa más de 55 kg y a lo mucho 58 kg. Si las próximas dos semanas piensa bajar 1,5 kg, ¿entre qué valores oscilará su peso? Expresa el resultado en notación de conjuntos.
- 4) Rafael averiguó en una entidad bancaria que podía pagar un préstamo en un tiempo no menor de 5 años ni mayor de 15 años. Representa la situación con un intervalo.
- 5) Escribir las siguientes desigualdades mediante intervalos abiertos, cerrados o semiabiertos en cada caso:

a) $-\infty \leq x \leq \frac{3}{2}$

b) $\frac{7}{3} \leq x \leq 6$

c) $-11 < x < 11$

d) $-\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{8}$

e) $\frac{2}{5} \leq x \leq \frac{5}{2}$

f) $-4 < x < \frac{2}{7}$

g) $7 < x < \infty$

h) $-5 \leq x \leq 15$

i) $\frac{1}{7} < x < \frac{9}{7}$

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 22/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“DIMENSIONES Y DISTANCIAS EN EL UNIVERSO”

II. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD	Matematiza situaciones	▪ Reconoce la notación científica como sistema de representación simbólica de números muy grandes y números muy próximos al cero
	Comunica y representa ideas matemáticas	▪ Representa los números racionales por medio de la notación científica
	Elabora y usa estrategias	▪ Usa estrategias para expresar números muy grandes o muy pequeños por medio de la notación científica

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (10minutos)

- El docente expone la necesidad de poder expresar de forma simplificada números que representen medidas extremadamente grandes y extremadamente pequeñas (anexo 1).

Desarrollo: (65minutos)

- El docente presenta el propósito de la clase: “Explorar la notación científica”

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Los científicos, matemáticos e ingenieros, cuando trabajan con números, muy grandes o muy pequeños, usan la notación científica para expresar esas cantidades. La notación científica es una abreviación matemática, basada en la idea de que es más fácil leer un exponente que contar muchos ceros en un número. Números muy grandes o muy pequeños necesitan menos espacio cuando son escritos en notación científica porque los valores de posición están expresados como potencias de 10. Los cálculos con números largos son más fáciles de hacer cuando se usa la notación científica. La forma general de un número en notación científica es $a \times 10^n$ donde $1 \leq a \leq 10$ y “n” es un entero y “a” es un número decimal.

La notación científica tiene, sobre la notación usual, la siguiente ventaja: las cifras se nos dan contadas, con lo que el orden de magnitud del número es evidente. Esta notación es útil, sobre todo, para expresar números muy grandes o muy pequeños. Un número puesto en notación científica consta de:

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero (la de las unidades).
- El resto de las cifras significativas, si las hay, puestas como parte decimal. Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

- El docente presenta el siguiente ejemplo:

	Notación decimal	Notación científica
Masa de la tierra	5 980 000 000 000 000 000 000 kg	$5,98 \cdot 10^{24} kg$
Masa del protón	0,000000000 0000 0 0000 0000167 kg	$1,67 \cdot 10^{-27} kg$
Distancia media el sol a la tierra	149 600 000 000 m	$1,496 \cdot 10^{11} m$

- Los estudiantes desarrollan la actividad 01.
- Para continuar, el docente presenta la siguiente información en un papelógrafo:

*El ácaro de la sarna, denominado científicamente *Sarcoptes scabiei*, mide entre 0,4 a 0,7 mm de largo. Afecta a las ovejas en todo el mundo, y es uno de los ectoparásitos ovinos más dañinos. Su ciclo vital suele durar de 10 a 12 días. Las hembras adultas ponen unos 100 huevos. De estos, emergen pequeñas ninfas que, tras pasar por varios estadios y mudas, dan lugar a los adultos.*

- El docente solicita que, luego de leer y procesar la información, resuelvan la siguiente situación problemática.

En un corral hay 120 ovejas y cada una adquirió 7 hembras adultas del ácaro de la sarna. Al cabo de un mes, ¿cuántas de estas hembras adultas se habrán reproducido?, ¿qué expresión les ayudaría a simplificar las operaciones? ¿Cómo podrían expresar la medida usando la notación científica?

- El docente orienta las pautas de trabajo que seguirán los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.
 - Se organizan en equipos para que los estudiantes tengan un nivel de participación equitativo en el desarrollo de las actividades.
 - De forma individual, elaboran tablas donde organizan datos de cantidades decimales y los expresan en notación científica.
- El docente solicita a los equipos que lean la información del papelógrafo en forma pausada y que registren en la Tabla 1 los datos numéricos en relación a la sarna. El docente los acompaña en la elaboración de la siguiente tabla:

Tabla 1

Nombre común del ácaro	Nombre científico	Medida	Tiempo del ciclo de reproducción	Número de huevos por cada hembra	Número de huevos en notación científica
Ácaro de la sarna	Sarcoptes scabiei	0,4 a 0,7 mm	10 a 12 días	100	1×10^2

- Luego el docente pregunta: ¿cómo podemos calcular el total de estos ácaros en un mes, considerando que el ciclo de reproducción es de 10 días?
- Los estudiantes proponen su propia estrategia y el docente los orienta en el uso de la notación científica para representar el número de huevos.
- El docente monitorea el trabajo de los estudiantes en la resolución de la situación y, si es necesario, brinda apoyo orientándolos en el cálculo de los datos.
- Se espera que los estudiantes lleguen a proponer:

En un mes se reproducirán 3 veces.

Si hay 120 ovejas y cada uno tiene 7 ácaros, entonces se expresará: $120 \times 7 = 840 = 8,4 \times 10^2$

Luego:

El total de ácaros en un mes va ser: $840 \times 3 \times 100 = 252000$; en notación científica es $2,52 \times 10^5$.

- El docente induce a los estudiantes a comprender el concepto de la notación científica a través de la siguiente interrogante: ¿cómo podrían expresar la medida usando notación científica?

El docente los orienta de la siguiente manera:

$$0,4 = 4 \times 10^{-1}$$

$$0,7 = 7 \times 10^{-1}$$

CIERRE (15min)

- Los estudiantes desarrollan los ejercicios de la actividad 01.

IV. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- Los estudiantes desarrollan los siguientes problemas:
 - ❖ La velocidad de la luz es aproximadamente 300 000 km/s. ¿Cuántos minutos transcurrirán para que un rayo de luz llegue desde el sol a la tierra si este se encuentra a 150 000 000 km?
 - ❖ Una unidad de masa atómica (uma) tiene $1,660 \times 10^{-27}$ kg. Si el átomo de carbono tiene 12 unidades de masa atómica, ¿Cuál es la masa de 14 000 000 átomos de carbono?

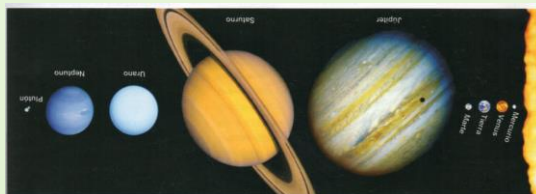
V. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ Fichas de trabajo
- ❖ Fotocopias
- ❖ Plumones

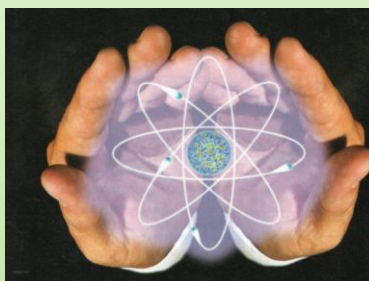
Anexo1

DIMENSIONES Y DISTANCIAS EN EL UNIVERSO

En el Universo existen cuerpos, que llamamos astros, que tienen dimensiones mucho más grandes de nuestro planeta y se encuentran a distancias tan grandes que nos resulta difícil hasta imaginarlas.



Al mismo tiempo existen partículas de materia tan pequeñas que el hombre solamente puede imaginarlas porque, a pesar de todos los avances de la tecnología, nos resulta imposible verlas.



El hombre pero, impulsado por su curiosidad, por la sed de respuestas a todas sus interrogantes, por la necesidad de resolver los problemas que la vida les propone, necesita estudiar, comprender también estos extremos.

Desde hace muchos siglos el hombre, levantando su mirada a la bóveda celestial estudia con curiosidad los misterios del universo, para entender de dónde venimos, si estamos solos, que cosa hay en este infinito espacio que nos rodea. El nacimiento de la astronomía ha planteado al hombre un nuevo problema:

¿Cómo representar estos nuevos números tan grandes de una forma más fácil de interpretar?

Sucesivamente el avance de la medicina y de la biología, los descubrimientos de la física nuclear, han mostrado la necesidad de poder medir, comparar, representar dimensiones extremadamente pequeñas.

Para responder a estas necesidades se ha diseñado una forma de escribir estos números extremos llamada notación científica. Esto se ha realizado utilizando las potencias de base 10, fáciles de calcular y que indican a simple vista el orden de grandeza de los números por más grandes o pequeños que sean.

Esta forma de escribir los números tiene aplicación en numerosos contextos, como ya hemos dicho, expresar por ejemplo las dimensiones de un astro o la longitud de una bacteria, la masa de un electrón o la velocidad de la luz.

- $10^2 = 100$
- $10^4 = 10\ 000$
- $10^7 = 10\ 000\ 000$
- $10^{11} = 100\ 000\ 000\ 000$

El resultado de la potencia de 10 elevado a n es igual a la unidad seguida de n ceros.

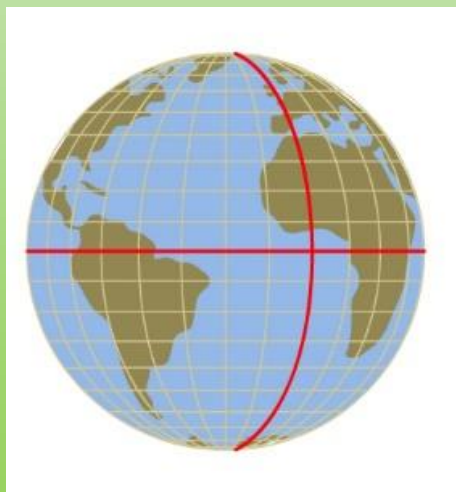
Actividad



¡Ahora ponemos en práctica!

La Tierra, nuestro planeta, tiene una forma que se aproxima a la de una mandarina gigante. Para poder ubicar cada punto en la superficie terrestre y comunicar su posición el hombre ha inventado un sistema de coordenadas llamado coordenadas geográficas.

Para esto se han trazado en la superficie de la Tierra unas líneas imaginarias, meridianos y paralelos. Los primeros representan las líneas de intersección entre la superficie terrestre y planos verticales que pasan por los dos polos (polo norte y polo sur). El más famoso es el “Meridiano de Greenwich”



Los paralelos en cambio son las líneas de intersección entre la superficie terrestre y planos horizontales, paralelos entre sí y perpendiculares al eje de rotación de la Tierra. El más famoso entre estos paralelos es el Ecuador.

Actividad

La longitud del meridiano terrestre es aproximativamente unos 40 millones de metros.

Expresa la longitud del meridiano en notación científica en las tres distintas unidades de medidas.

MERIDIANO DE GREENWICH 40 millones de metros	Longitud en metros
	Longitud en kilometros
	Longitud en centimetros

La longitud del radio ecuatorial de la Tierra mide mediamente 6369426,75 metros.

Redondea y expresalo en notación científica.

RADIO ECUATORIAL 6369426,75 de metros	Longitud en metros
	Longitud en kilometros
	Longitud en centimetros

Actividad

- 1) Expresa en notación científica:
 - a) 53 000 000 000 000
 - b) 0,0000000008
 - c) 520 010
 - d) 0,000000076
 - e) 29 500 000
 - f) 0,000004201
 - g) 0,000073
- 2) Un electrón se mueve con una rapidez de 300 000 000 000 mm/s. ¿Cuántos milímetros se moverá en 0,0000037 segundos?
- 3) La velocidad de la luz es aproximadamente 300 000 km/s. ¿Cuántos minutos transcurrirán para que un rayo de luz llegue desde el sol a la tierra si este se encuentra a 150 000 000 km?
- 4) Una unidad de masa atómica (uma) tiene $1,660 \times 10^{-27}$ kg. Si el átomo de carbono tiene 12 unidades de masa atómica, ¿Cuál es la masa de 14 000 000 átomos de carbono?

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 27/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“EL LOGARITMO”

II. APRENDIZAJES ESPERADOS

COMPETENCIA	CAPACIDADES	INDICADORES
ACTÚA Y PIENSA MATEMÁTICAMENTE EN SITUACIONES DE CANTIDAD	Matematiza situaciones	▪ Relaciona la potenciación con sus operaciones inversas: Radicación y logaritmo
	Elabora y usa estrategias	▪ Utiliza la propiedad de la potenciación con exponente entero y base entero ▪ Calcula el logaritmo de un número utilizando las propiedades
	Razona y argumenta generando ideas matemáticas	▪ Resuelve operaciones entre logaritmos y determina si sus respuestas son razonables

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (10 minutos)

- El profesor presenta una pequeña historia sobre los logaritmos

LA HISTORIA DE LOS LOGARITMOS

El uso sistemático de los logaritmos fue introducido por Henry Briggs y John Napier. El origen del concepto de logaritmo se encuentra en el problema de simplificar la pesada tarea de los calculadores, excesivamente complicada en cuanto implica, multiplicaciones, divisiones, incluso potenciación o extracción de raíces. En los siglos XIV, XV, XVI, sobre todo en astronomía, eran necesarias muchas operaciones que exigían cierta precisión.

- El docente les explica cómo elaborar la tabla de Napier, que es una tabla de doble entrada que contiene algunas potencias de base y exponente natural.
Por ejemplo:

n	2 ⁿ	3 ⁿ	4 ⁿ	5 ⁿ
1	2	3	4	5
2	4	9	16	25
3	8	27	64	125

- Luego, junto a los estudiantes se realizan algunos ejercicios aplicando la definición de logaritmos y utilizando los elementos de la tabla de Napier.

Desarrollo: (60 minutos)

- El docente presenta el propósito de la clase que es explorar sobre los logaritmos.

LOGARITMOS

Dados dos números a y b , $a \neq 1$, el logaritmo en base " a " de un número " b ", llamado argumento, es el exponente " c " al que hay que elevar a para que el resultado sea " b ".

$$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$$

Al resolver logaritmos se debe tener en cuenta lo siguiente:

- El número " b " debe ser un número real positivo: $b > 0$
- La base " a " debe ser un número real positivo, diferente de la unidad: $a > 0, a \neq 1$
- El logaritmo " c " puede ser cualquier número real positivo, negativo o cero.

Ejemplos:

Justifico el logaritmo de un número:

- a) $125 = 5^3 \leftrightarrow \log_5 125 = 3$
- b) $32 = 2^5 \leftrightarrow \log_2 32 = 5$
- c) $81 = 3^4 \leftrightarrow \log_3 81 = 4$
- d) $0.00001 = 10^{-5} \leftrightarrow \log_{10} 0.00001 = -5$

¡RECUERDA QUE...!

Los logaritmos en base 10 se llaman logaritmos decimales. En estos logaritmos no se escribe la base.

Ejemplo:

- $\log 100 = 2$
- $\log 0,1 = -1$

PROPIEDAD DE LOS LOGARITMOS

Logaritmo	Notación simbólica	Ejemplo numérico
De la unidad	$\log_a 1 = 0$	$\log_4 1 = 0$
De la base	$\log_a a = 1$	$\log_6 6 = 1$
De un producto	El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. $\log_a(p \cdot q) = \log_a p + \log_a q$	$\log_3 243 = \log_3(27 \cdot 9)$ $= \log_3 27 + \log_3 9$ $= 3 + 2 = 5$
De un cociente	El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor. $\log_a(p \div q) = \log_a p - \log_a q$	$\log_2(256 \div 64)$ $= \log_2 256 - \log_2 64 = 8 - 6 = 2$
De una potencia	El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$	$\log_2 512 = \log_2 8^3 = 3 \cdot \log_2 8 = 3 \cdot 3 = 9$

De una raíz	$\log_a \sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n} \cdot \log_a x$	$\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 \sqrt[3]{5^2} = \log_5 (5)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_5 5 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$
Cuando la base es una potencia	$\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a x$	$\log_8 256 = \log_{2^3} 16^2 = \frac{2}{3} \cdot \log_2 16 = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$

- Los estudiantes resuelven los siguientes ejemplos:

1) *Calcula los siguientes logaritmos.*

- a) $\log_7 343$
- b) $\log_3 729$
- c) $\log_6 36 + \log_3 27 - \log_2 16$
- d) $\log_4 36 + \log_4 9 + 3 \log_5 5^2$
- e) $\log_{125} 625$
- f) $\log_{81} 1/243$

CIERRE (20min)

- Los alumnos desarrollan los ejercicios (1; 2 y 3) del libro de 4º grado de secundaria de la página 55.

IV. TAREA A TRABAJAR EN CASA

- El docente solicita a los estudiantes que desarrollen la actividad 4 del libro.

V. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ Matemáticas 4 (Santillana); Ministerio de Educación.
- ❖ Proyecto Encuentros-Matemática 4, s.m
- ❖ Plumones

PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN DE APRENDIZAJE

DATOS:

Unidad de Gestión Educativa : CARLOS FERMÍN FITZCARRALD
Institución Educativa Pública : N° 86378 “SANTA ROSA” DE UCHUSQUILLO
Área : MATEMÁTICA
Fecha : 30/09/2016

Grado: Cuarto/ Duración: 2 horas pedagógicas

I. TÍTULO DE LA SESIÓN

“EXAMEN DE POST-TEST”

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

Inicio: (05 minutos)

- El docente da algunas indicaciones antes de entregar el examen.

Desarrollo: (70 minutos)

Los estudiantes individualmente desarrollan el post-test “Viaje en la Historia de los Números”

APELLIDOS Y NOMBRES:.....

GRADO Y SECCIÓN:.....**FECHA:**.....

- 1) Marca con una $\surd$ el conjunto o los conjuntos al que pertenece cada número.

Número Conjunto	-16	$3/7$	$\sqrt{12}$	0,24	$2,1\overline{6}$	$45/15$	$\sqrt{3}+1$	$\sqrt{64}$
N								
Z								
Q								
I								

- 2) Descompón en producto de factores primos los siguientes números:

120; -35; 42; 345; 163; 1386.

- 3) Representa gráficamente cada intervalo dado de manera simbólica.

Representación simbólica	Representación gráfica
$[-1; 4]$	
$] -\infty; 2]$	
$[-3; 0[$	
$] -2,5; 8]$	

$\frac{3}{5}$; $2\frac{1}{5}$

4) Expresa en notación científica.

- a) 0,0000000007005
- b) 700000
- c) 0,00000000921
- d) 15000000000
- e) 394800000
- f) 0,00004009
- g) 0,0000000051

5) Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

- a) 3,49
- b) $0,\overline{12}$
- c) 0,072
- d) $2,\overline{54}$

6) Resuelve los siguientes problemas con números racionales:

$\frac{3}{5}$ de los estudiantes de 4° A tienen hermanos en la misma institución educativa; $\frac{5}{6}$ los tienen en primaria y los 3 restantes, en secundaria. ¿Cuántos estudiantes hay en 4° A?

Luz trabaja en una empresa donde le pagan s/. 1275 de sueldo en 30 días de trabajo. Luego de 23 días de trabajo se ve obligada a renunciar y la empresa le paga s/. 885, y le entrega una bolsa de víveres. Si Luz quedó conforme, ¿en cuánto valorizó la bolsa de víveres?

Andrés desea empacar 160 tornillos, 150 tuercas y 120 arandelas en cajas con igual cantidad de unidades de cada clase. ¿Cuál es la máxima cantidad de unidades que puede contener cada una? ¿Cuántas cajas se requieren?

7) Resuelve el siguiente problema:

Sandra heredó un terreno rectangular de $10\sqrt{2}\text{m}$ de largo y $6\sqrt{2}\text{m}$ de ancho. Si proyecta cercarlo con paredes de ladrillo, ¿Cuántos metros de pared construirá?

8) Calcula los siguientes logaritmos:

a) $\log_4 64$

b) $\log_3 81 + \log_2 64$

c) $\log_7 343 - \log_8 512 + \log_4 256 - \log_3 729$

CIERRE (15 min)

- El docente recoge la ficha de la evaluación.
- Junto a los estudiantes se desarrollan algunos ejercicios del examen.

V. MATERIALES O RECURSOS A UTILIZAR

- ❖ Matemáticas 4 (Santillana); Ministerio de Educación.
- ❖ Proyecto Encuentros-Matemática 4, s.m
- ❖ Plumones